17 ЗАДАНИЕ БЕЗ ПОТЕРЬ

Оптимизация с физическим контекстом

Полный разбор всех типов задач + лайфхаки
для быстрого решения без производной

**ЕГЭ 2027 | Профильная математика |
Официальные данные ФИПИ**



Пудов Даниил

Образование:
Бакалавриат по направлению
«Прикладная математика и информатика» (01.03.02)

Репетиторская деятельность:
4 года успешного преподавания и подготовки к ЕГЭ

По данным ФИПИ 2027: новое задание №17 проверяет умение моделировать реальные ситуации и исследовать функции с помощью производной.

Содержание

1 Что такое задание №17 и почему оно новое **1**

2 Теория: как исследовать функцию на максимум и минимум **2**

2.1 Общий алгоритм 2

2.2 Лайфхаки: как считать быстрее и без ошибок 2

3 Разбор типовых задач **5**

4 Задачи для самостоятельного решения **15**

5 Таблица ответов к задачам для самостоятельного решения **18**

ЧТО ТАКОЕ ЗАДАНИЕ №17 И ПОЧЕМУ ОНО НОВОЕ

Летом 2026 года ФИПИ опубликовал проекты демоверсий ЕГЭ 2027 года, и профильная математика изменилась заметнее других предметов. Общее число заданий выросло с 19 до 20, а максимальный первичный балл — с 32 до 33. Один из самых важных апдейтов — новое задание №17 во второй части работы.

Критерии оценивания задания №17 (максимум 2 балла)

- **2 балла:** Обоснованно получен правильный ответ. Верно построена математическая модель (функция), правильно найдена производная, верно найдены критические точки, обоснован выбор точки максимума/минимума (через знак производной или вторую производную), дан верный числовой ответ.
- **1 балл:** Решение содержит верную математическую модель и верные шаги нахождения производной и критических точек, но допущена вычислительная ошибка, ИЛИ не обоснован характер экстремума (нет исследования знака производной), ИЛИ дан неверный финальный ответ при верном ходе решения.
- **0 баллов:** Не выполнены условия, позволяющие поставить 1 балл (например, неверно составлена функция, грубая ошибка в правиле дифференцирования, ответ не соответствует смыслу задачи).

Проще говоря, №17 — это задача, в которой реальная (чаще всего физическая) формула превращается в функцию одной переменной, а от вас требуется найти её наибольшее или наименьшее значение с помощью производной. Все нужные физические законы и формулы в задании всегда даются в условии — зубрить физику специально не нужно, но придётся аккуратно работать с формулами и уверенно применять производную.

Важно

Материалы ФИПИ на момент подготовки методички являются **проектом**: до 30 сентября 2026 года собираются замечания педагогов и экспертов, а утверждённые демоверсии должны выйти в первой половине ноября 2026 года. Как правило, ключевые изменения сохраняются и в итоговой версии, поэтому готовиться к такому типу задач стоит уже сейчас — но перед экзаменом полезно свериться с финальной демоверсией.

Отсканируйте для перехода к актуальным демоверсиям на fipi.ru

Обратите внимание ещё на один момент: из первой части исключено прежнее задание, где нужно было просто найти точку экстремума функции по графику или готовой формуле. Это не значит, что тема «производная и экстремумы» стала менее важна — наоборот, теперь она проверяется не в отрыве от жизни, а сразу в прикладном контексте задания №17. Значит, чистую технику дифференцирования нужно доводить до автоматизма.

ТЕОРИЯ: КАК ИССЛЕДОВАТЬ ФУНКЦИЮ НА МАКСИМУМ И МИНИМУМ

Шпаргалка: основные правила дифференцирования

- $(C)' = 0$
- $(x^n)' = nx^{n-1}$
- $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
- $(\sin kx)' = k\cos kx$
- $(\cos kx)' = -k\sin kx$
- $(e^{kx})' = ke^{kx}$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

➢ Общий алгоритм

Почти любая задача №17 решается по одному и тому же плану. Выучите его один раз — и дальше останется только подставлять конкретную формулу.

Алгоритм исследования функции на экстремум

1. **Определите переменную и её ОДЗ.** Что в задаче меняется (сопротивление, угол, время, радиус...)? В каких границах эта величина может находиться *по смыслу задачи*?
2. **При необходимости упростите формулу.** Избавьтесь от лишних корней, сделайте замену переменной, приведите выражение к виду, который удобно дифференцировать (см. лайфхаки ниже).
3. **Найдите производную** полученной функции по правилам дифференцирования.
4. **Найдите критические точки** — значения переменной из ОДЗ, при которых производная равна нулю (или не существует).
5. **Определите знак производной** слева и справа от каждой критической точки методом интервалов. Постройте числовую ось, расставьте знаки $+/-$ и стрелки возрастания/убывания функции.
6. **Сделайте вывод** о характере точки: если производная меняет знак с $+$ на $-$ — это точка максимума, если с $-$ на $+$ — точка минимума.
7. **Проанализируйте вопрос задачи.** Внимательно перечитайте условие: требуется найти *аргумент* (например, сопротивление R), при котором достигается экстремум, или *само экстремальное значение* функции (например, мощность P)? Чётко запишите итоговый ответ в соответствии с этим.

➢ Лайфхаки: как считать быстрее и без ошибок

Лайфхак №1. Избавляемся от корня: максимизируем квадрат

Если исследуемая величина f всегда **положительна**, то f и f^2 достигают максимума (минимума) в **одной и той же точке**. Дифференцировать квадрат выражения без корня почти всегда проще.

$$f > 0 \implies \text{точка экстремума } f \text{ совпадает с точкой экстремума } f^2.$$

Лайфхак №2. Замена переменной

Если переменная входит в формулу только через один и тот же «блок» (например, только как τ^2), замените этот блок новой буквой. Не забудьте после нахождения оптимального значения новой переменной **вернуться** к исходной.

Лайфхак №3. Внесение переменной под корень

Если в выражении встречается произведение вида $x\sqrt{x}$, удобно свернуть его в один корень *до* дифференцирования: $x\sqrt{x} = x^{3/2}$.

Лайфхак №4. При дифференцировании дроби знак определяет числитель

Если $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, то $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$. Знаменатель $v(x)^2$ всегда положителен. Значит, знак $f'(x)$ целиком зависит от знака числителя. Не тратьте время на упрощение всей дроби целиком.

Лайфхак №5. Показательный множитель «сокращается»

Если производная содержит множитель e^{kt}, помните: он **никогда не равен нулю**. При решении уравнения $f'(t) = 0$ его можно смело сократить.

Лайфхак №6. Экспресс-проверка через неравенство о средних

Для функций вида $f(x) = ax + \dfrac{b}{x}$ при $x > 0,\ a > 0,\ b > 0$: $ax + \dfrac{b}{x} \geqslant 2\sqrt{ab}$, причём равенство достигается при $ax = \dfrac{b}{x}$, то есть при $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Лайфхак №7. Не забывайте про физический смысл

Если критическая точка не попадает в допустимый по смыслу задачи промежуток, экстремум внутри интервала отсутствует, и наибольшее/наименьшее значение нужно искать **на границе** области определения.

Лайфхак №8. Замена, сводящая к квадратному трёхчлену

Если функция имеет вид дроби, где в числителе и знаменателе стоят степени переменной, попробуйте **разделить числитель и знаменатель на старшую степень**, а затем сделать замену $u = \dfrac{1}{x}$ (или $u = x + \dfrac{c}{x}$). Часто это превращает задачу в нахождение вершины параболы — а вершину квадратного трёхчлена $au^2 + bu + c$ школьники находят по формуле $u_0 = -\dfrac{b}{2a}$ без всякой производной!

Осторожно! Типичные ошибки на экзамене

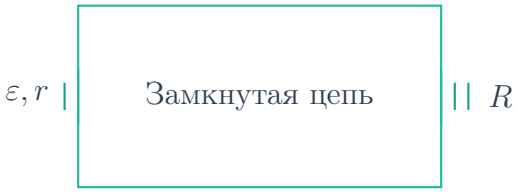
1. **Перепутали «где» и «сколько».** В задаче спрашивают: «При каком сопротивлении мощность наибольшая?» (ответ: $R = 2$), а ученик пишет значение мощности ($P = 450$). Всегда перечитывайте вопрос задачи!
2. **Игнорирование физического смысла (ОДЗ).** Корень из отрицательного числа, отрицательное время или длина. Если критическая точка не входит в ОДЗ, экстремум ищется на границе промежутка.
3. **Ошибка в знаке при производной частного.** Забывают минус в формуле $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. Лайфхак №4 помогает это контролировать.
4. **Потеря множителя при дифференцировании сложной функции.** Например, производная $\sin(2\alpha)$ равна $2\cos(2\alpha)$, а не просто $\cos(2\alpha)$.

РАЗБОР ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Ниже — шесть задач формата №17: полный текст условия и подробное решение с комментариями. Там, где это возможно, мы показываем **несколько способов**: универсальный (через производную) и изящные (через алгебраические трюки и замены). Постарайтесь сначала решить самостоятельно, а потом свериться с разбором.

Задача 1. Электродинамика: мощность на реостате

На заводе есть генератор с ЭДС $\varepsilon = 60\,\text{V}$ и внутренним сопротивлением $r = 2\,\Omega$. К генератору подключают реостат сопротивлением R (в омах). Сила тока в цепи определяется законом Ома: $I = \dfrac{\varepsilon}{r+R}$. Тепловая мощность (в ваттах), выделяемая на реостате, находится по формуле Джоуля — Ленца: $P = I^2 R$. При каком сопротивлении R мощность P будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая мощность?



Способ 1. Универсальный: через производную

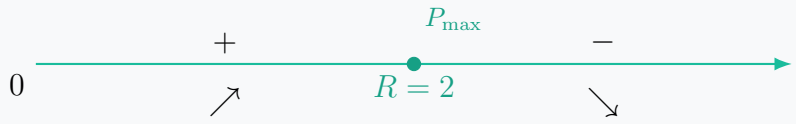
Выразим мощность через ε, r и R:

$$P(R) = \left(\frac{\varepsilon}{r+R}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2} = \frac{3600R}{(R+2)^2}, \qquad R > 0.$$

Применим правило производной частного. По лайфхаку №4 знак производной определяется числителем:

$$P'(R) = \frac{3600(R+2)^2 - 3600R \cdot 2(R+2)}{(R+2)^4} = \frac{3600(R+2)\big[(R+2) - 2R\big]}{(R+2)^4} = \frac{3600(2-R)}{(R+2)^3}.$$

Знаменатель $(R+2)^3 > 0$ при всех $R > 0$, поэтому знак $P'(R)$ совпадает со знаком множителя $(2-R)$. Приравняем числитель к нулю: $2 - R = 0 \Rightarrow R = 2$.
Метод интервалов:



При $R < 2$ производная $P'(R) > 0$ (функция возрастает), при $R > 2$ производная $P'(R) < 0$ (функция убывает). Значит, $R = 2$ — точка максимума.
Вычислим наибольшую мощность:

$$P(2) = \frac{3600 \cdot 2}{4^2} = \frac{7200}{16} = 450 \text{ (Вт)}.$$

Ответ: $R = 2\,\Omega$, наибольшая мощность $P_{\max} = 450\,\text{W}$.

Способ 2. Изящный: без производной, через неравенство о средних

Запишем функцию в более удобном виде, разделив числитель и знаменатель на R (это законно, т. к. $R > 0$):

$$P(R) = \frac{3600R}{(R+2)^2} = \frac{3600}{\dfrac{(R+2)^2}{R}} = \frac{3600}{\dfrac{R^2+4R+4}{R}} = \frac{3600}{R+4+\dfrac{4}{R}}.$$

Чтобы дробь была **наибольшей**, знаменатель должен быть **наименьшим**. Применим неравенство о средних к сумме $R + \dfrac{4}{R}$ (оба слагаемых положительны):

$$R + \frac{4}{R} \geqslant 2\sqrt{R \cdot \frac{4}{R}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Равенство достигается при $R = \dfrac{4}{R}$, то есть при $R^2 = 4$, откуда $R = 2$ (т. к. $R > 0$). Минимальное значение знаменателя: $4 + 4 = 8$. Следовательно,

$$P_{\max} = \frac{3600}{8} = 450 \text{ (Вт)}.$$

Этот способ быстрее и элегантнее: не нужно брать производную и исследовать её знак.

Полезное наблюдение

Для любой формулы вида $P(R) = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$ критическая точка всегда получается $R = r$ (сопротивление нагрузки равно внутреннему сопротивлению источника), а максимальная мощность — $P_{\max} = \dfrac{\varepsilon^2}{4r}$. Это известное «условие согласования нагрузки» из электротехники.

Задача 2. Механика: резонанс на испытательном стенде

Испытательный стенд создаёт вынуждающие колебания рамы автомобиля, проверяя работу амортизаторов. Амплитуда вынужденных колебаний рамы (в условных единицах) выражается формулой

$$A(\tau) = \frac{k\,\tau^2}{\sqrt{(T^2 - \tau^2)^2 + nT^2\tau^2}},$$

где τ — период колебаний, задаваемых стендом (в секундах), $T = 12\,\text{s}$ — период собственных колебаний рамы, $n = 0{,}875$ — коэффициент, зависящий от жёсткости подвески, k — постоянный коэффициент. При каком периоде τ амплитуда вынужденных колебаний будет наибольшей?

Способ 1. Универсальный: через производную и замену

Так как $A(\tau) > 0$ при всех $\tau > 0$, по лайфхаку №1 точка максимума A совпадает с точкой максимума A^2 — а с квадратом работать удобнее, корень исчезает:

$$A^2(\tau) = \frac{k^2\tau^4}{(T^2 - \tau^2)^2 + nT^2\tau^2}.$$

Сделаем замену $x = \tau^2$, $x > 0$ (лайфхак №2):

$$f(x) = \frac{k^2x^2}{(T^2 - x)^2 + nT^2x}.$$

Поскольку k^2 — положительная константа, она не влияет на точку максимума. Исследуем функцию

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + (n-2)T^2x + T^4}.$$

Обозначим числитель и знаменатель:

$$u(x) = x^2, \qquad v(x) = x^2 + (n-2)T^2x + T^4.$$

Их производные:

$$u'(x) = 2x, \qquad v'(x) = 2x + (n-2)T^2.$$

По правилу производной частного:

$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Числитель производной (именно он определяет знак $g'(x)$ по лайфхаку №4):

$$N(x) = 2x\left[x^2 + (n-2)T^2x + T^4\right] - x^2\left[2x + (n-2)T^2\right].$$

Раскроем скобки пошагово:

$$2x \cdot x^2 = 2x^3, \quad 2x \cdot (n-2)T^2x = 2(n-2)T^2x^2, \quad 2x \cdot T^4 = 2T^4x,$$

$$x^2 \cdot 2x = 2x^3, \quad x^2 \cdot (n-2)T^2 = (n-2)T^2x^2.$$

Вычитаем:

$$N(x) = \bigl[2x^3 + 2(n-2)T^2x^2 + 2T^4x\bigr] - \bigl[2x^3 + (n-2)T^2x^2\bigr] = (n-2)T^2x^2 + 2T^4x.$$

Выносим общий множитель T^2x (при $x > 0$ он положителен):

$$N(x) = T^2x\bigl[(n-2)x + 2T^2\bigr].$$

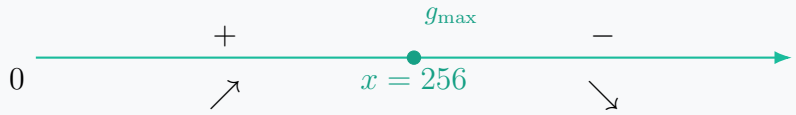
Приравняем $N(x) = 0$. Так как $T^2x > 0$, остаётся:

$$(n-2)x + 2T^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{2T^2}{2-n} \quad (\text{при } n < 2).$$

Подставим числа: $T = 12$, $n = 0{,}875$:

$$x_0 = \frac{2 \cdot 144}{2 - 0{,}875} = \frac{288}{1{,}125} = 256.$$

Метод интервалов для $N(x)$:



Коэффициент $(n-2) = -1{,}125 < 0$, поэтому выражение $(n-2)x + 2T^2$ убывает и меняет знак с $+$ на $-$ при переходе через $x_0 = 256$ — значит, x_0 действительно точка максимума. Возвращаемся к исходной переменной:

$$\tau_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{256} = 16 \text{ (с)}.$$

Ответ: $\tau = 16\,\text{s}$.

Способ 2. Изящный: через замену, сводящую к вершине параболы

Вернёмся к функции (после замены $x = \tau^2$ и отбрасывания константы k^2):

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2 + (n-2)T^2x + T^4}, \qquad x > 0.$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2 (это законно, т. к. $x > 0$):

$$g(x) = \frac{1}{1 + (n-2)T^2 \cdot \dfrac{1}{x} + T^4 \cdot \dfrac{1}{x^2}}.$$

Сделаем замену $u = \dfrac{1}{x}$, $u > 0$. Тогда:

$$g = \frac{1}{1 + (n-2)T^2u + T^4u^2} = \frac{1}{T^4u^2 + (n-2)T^2u + 1}.$$

Чтобы дробь g была **наибольшей**, знаменатель должен быть **наименьшим**. Знаменатель — это квадратный трёхчлен относительно u:

$$h(u) = T^4u^2 + (n-2)T^2u + 1.$$

Коэффициент при u^2 положителен ($T^4 > 0$), значит, парабола ветвями вверх, и её минимум достигается в вершине:

$$u_0 = -\frac{(n-2)T^2}{2T^4} = \frac{(2-n)T^2}{2T^4} = \frac{2-n}{2T^2}.$$

Возвращаемся к x:

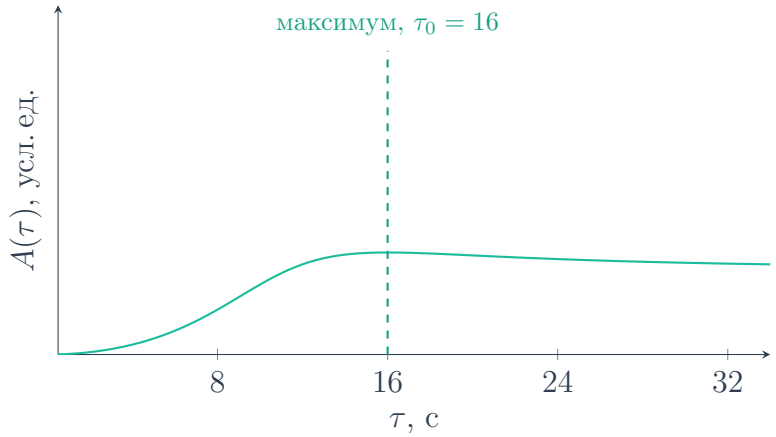
$$x_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{2T^2}{2-n}.$$

Подставим числа: $T = 12$, $n = 0{,}875$:

$$x_0 = \frac{2 \cdot 144}{2 - 0{,}875} = \frac{288}{1{,}125} = 256.$$

И наконец, $\tau_0 = \sqrt{x_0} = \sqrt{256} = 16$ с.
Этот способ элегантен: замена сводит задачу к нахождению вершины параболы — а это материал 8–9 класса, никаких производных!

Резонансная кривая: $T = 12\,\text{s}$, $n = 0{,}875$



Задача 3. Кинематика: дальность полёта снаряда

Тело бросают с начальной скоростью $v_0 = 20\,\text{м}\,\text{с}^{-1}$ под углом α к горизонту ($0° < \alpha < 90°$). Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10\,\text{м}\,\text{с}^{-2}$. Дальность полёта тела вычисляется по формуле

$$R(\alpha) = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$

При каком угле α дальность полёта будет наибольшей? Чему равна наибольшая дальность?

Способ 1. Универсальный: через производную

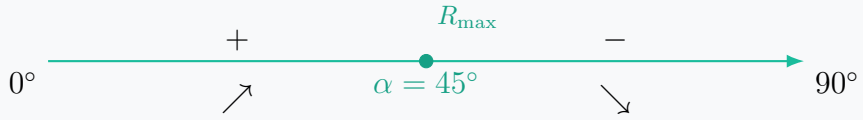
Подставим данные:

$$R(\alpha) = \frac{400\sin(2\alpha)}{10} = 40\sin(2\alpha), \qquad \alpha \in (0°; 90°).$$

Найдём производную по правилу дифференцирования сложной функции:

$$R'(\alpha) = 40\cos(2\alpha)\cdot 2 = 80\cos(2\alpha).$$

Приравняем к нулю: $\cos(2\alpha) = 0$. Так как $\alpha \in (0°; 90°)$, то $2\alpha \in (0°; 180°)$, и единственное решение на этом промежутке — $2\alpha = 90°$, то есть $\alpha = 45°$.
Метод интервалов:



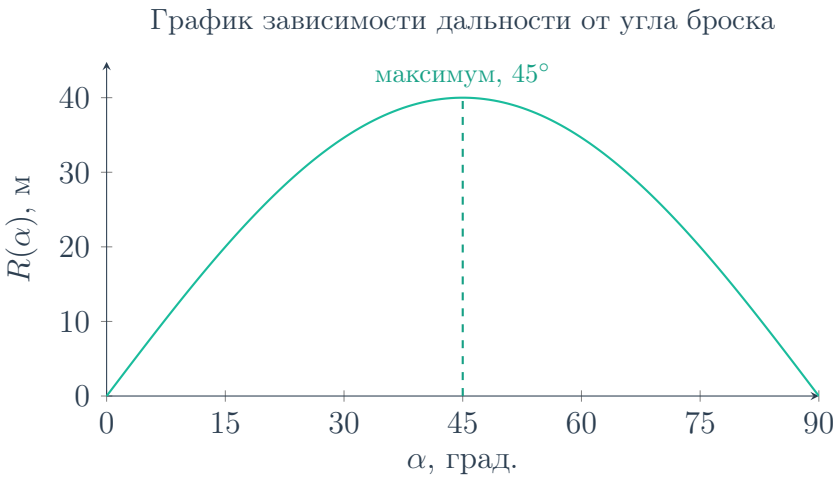
При $\alpha < 45°$ угол $2\alpha < 90°$, значит $\cos(2\alpha) > 0$ и $R'(\alpha) > 0$ (функция растёт); при $\alpha > 45°$ угол $2\alpha > 90°$, значит $\cos(2\alpha) < 0$ и $R'(\alpha) < 0$ (функция убывает). Следовательно, $\alpha = 45°$ — точка максимума.

$$R_{\max} = R(45°) = 40\sin(90°) = 40 \text{ (м)}.$$

Способ 2. Изящный: через свойства синуса

Функция $R(\alpha) = 40\sin(2\alpha)$ достигает наибольшего значения тогда, когда $\sin(2\alpha)$ наибольший. Известно, что $\sin t \leqslant 1$ для любого t, причём равенство $\sin t = 1$ достигается при $t = 90 + 360k$.
В нашем случае $2\alpha \in (0; 180)$, поэтому единственное подходящее значение: $2\alpha = 90$, откуда $\alpha = 45$.
Наибольшая дальность: $R_{\max} = 40 \cdot 1 = 40$ м.

Ответ: $\alpha = 45°$, наибольшая дальность $R_{\max} = 40\,\text{м}$.


График зависимости дальности от угла броска
максимум, 45°
40
30
20
10
0
$R(\alpha)$, м
0
15
30
45
60
75
90
α, град.

Задача 4. Оптика: точка минимальной освещённости

Два точечных источника света с силами света $I_1 = 100\,\text{cd}$ и $I_2 = 800\,\text{cd}$ расположены на прямой на расстоянии $L = 6\,\text{m}$ друг от друга. Суммарная освещённость точки, находящейся между источниками на расстоянии x от первого источника, вычисляется по формуле

$$E(x) = \frac{I_1}{x^2} + \frac{I_2}{(L-x)^2}, \qquad 0 < x < L.$$

На каком расстоянии от первого источника освещённость будет наименьшей?

Решение

Подставим данные:

$$E(x) = \frac{100}{x^2} + \frac{800}{(6-x)^2}, \qquad 0 < x < 6.$$

Найдём производную (используем правило дифференцирования степенной и сложной функций):

$$E'(x) = -\frac{200}{x^3} + \frac{1600}{(6-x)^3}.$$

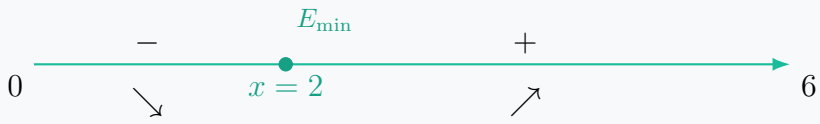
Приравняем производную к нулю и перенесём одно из слагаемых в другую часть:

$$\frac{1600}{(6-x)^3} = \frac{200}{x^3} \quad\Longrightarrow\quad \frac{(6-x)^3}{x^3} = \frac{1600}{200} = 8 \quad\Longrightarrow\quad \left(\frac{6-x}{x}\right)^3 = 8.$$

Извлекая кубический корень из обеих частей (обе части положительны на промежутке $(0;6)$):

$$\frac{6-x}{x} = 2 \quad\Longrightarrow\quad 6 - x = 2x \quad\Longrightarrow\quad x = 2.$$

Метод интервалов:



Проверим знак производной: при $x = 1$ имеем $E'(1) = -200 + \dfrac{1600}{125} = -200 + 12{,}8 < 0$ (убывает); при $x = 3$ имеем $E'(3) = -\dfrac{200}{27} + \dfrac{1600}{27} = \dfrac{1400}{27} > 0$ (возрастает). Значит, $x = 2$ — точка минимума.

Отметим, что при $x \to 0+$ и $x \to 6-$ освещённость $E(x) \to +\infty$. Следовательно, найденная точка $x = 2$ является точкой **глобального** минимума на интервале $(0;6)$.

$$E_{\min} = E(2) = \frac{100}{4} + \frac{800}{16} = 25 + 50 = 75\ (\text{лк}).$$

Ответ: $x = 2\,\text{m}$ от первого источника, наименьшая освещённость $75\,\text{lx}$.

Задача 5. Экономика: минимальные затраты на производство

Предприятие выпускает детали партиями по x штук. Затраты на хранение партии на складе пропорциональны её размеру и составляют $2x$ тыс. руб., а затраты на переналадку оборудования при каждом новом заказе обратно пропорциональны размеру партии и составляют $\dfrac{200}{x}$ тыс. руб. Суммарные затраты вычисляются по формуле

$$C(x) = 2x + \frac{200}{x}, \qquad x > 0.$$

При каком размере партии x суммарные затраты будут минимальными? Чему равны минимальные затраты?

Способ 1. Универсальный: через производную

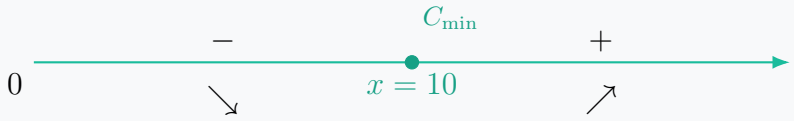
Найдём производную:

$$C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}.$$

Приравняем к нулю:

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad x = 10 \quad (x > 0).$$

Метод интервалов:



Проверим знак: при $x = 5$ имеем $C'(5) = 2 - 8 = -6 < 0$ (убывает); при $x = 20$ имеем $C'(20) = 2 - 0{,}5 = 1{,}5 > 0$ (возрастает). Значит, $x = 10$ — точка минимума.

$$C_{\min} = C(10) = 20 + 20 = 40 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Способ 2. Изящный: через неравенство о средних

Оба слагаемых $2x$ и $\dfrac{200}{x}$ положительны при $x > 0$. Применим неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$2x + \frac{200}{x} \geqslant 2\sqrt{2x \cdot \frac{200}{x}} = 2\sqrt{400} = 2 \cdot 20 = 40.$$

Равенство достигается, когда слагаемые равны:

$$2x = \frac{200}{x} \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 = 200 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 100 \quad \Longrightarrow \quad x = 10.$$

Минимальные затраты: $C_{\min} = 40$ тыс. руб. *Этот способ в разы быстрее: не нужно ни брать производную, ни исследовать её знак.*

Ответ: $x = 10$ деталей в партии, минимальные затраты 40.

Задача 6. Термодинамика: момент наибольшего тепловыделения

В ходе экзотермической реакции скорость выделения теплоты (в кВт) меняется со временем t (в секундах, $t \geqslant 0$) по закону

$$Q(t) = 50\,t\,e^{-0{,}5t}.$$

В какой момент времени скорость выделения теплоты будет наибольшей?

Решение

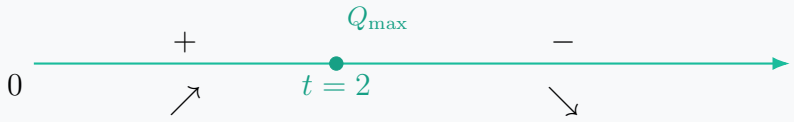
Найдём производную по правилу дифференцирования произведения:

$$Q'(t) = 50\left[e^{-0{,}5t} + t\cdot(-0{,}5)e^{-0{,}5t}\right] = 50\,e^{-0{,}5t}\,(1-0{,}5t)\,.$$

По лайфхаку №5 множитель $e^{-0{,}5t}$ никогда не обращается в нуль, поэтому его можно сократить при поиске корней:

$$Q'(t)=0 \quad\Longrightarrow\quad 1-0{,}5t=0 \quad\Longrightarrow\quad t=2.$$

Метод интервалов:



Знак производной определяется множителем $(1-0{,}5t)$: при $t<2$ он положителен ($Q'>0$, функция растёт), при $t>2$ — отрицателен ($Q'<0$, функция убывает). Значит, $t=2$ — точка максимума.

Проверим значения на границах области определения: $Q(0)=0$ и $\lim_{t\to+\infty} Q(t)=0$ (экспонента убывает быстрее любой степенной функции). Таким образом, наибольшее значение достигается именно в критической точке $t=2$.

Для полноты картины вычислим и саму наибольшую мощность тепловыделения: $Q(2)=50\cdot 2\cdot e^{-1}=\dfrac{100}{e}\approx 36{,}8$ кВт.

Ответ: $t=2$ s.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решите десять задач самостоятельно, опираясь на алгоритм и лайфхаки из раздела 2. Решений здесь нет — сверьте только окончательный ответ по таблице в конце методички. Не подглядывайте в таблицу раньше времени!

Задача 1 (Электродинамика)

Генератор имеет ЭДС $\varepsilon = 100\,\text{V}$ и внутреннее сопротивление $r = 5\,\Omega$. К генератору подключена нагрузка сопротивлением R. Мощность, выделяемая на нагрузке, вычисляется по формуле $P(R) = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}$. При каком значении R мощность будет наибольшей?

Задача 2 (Механика, колебания)

Амплитуда вынужденных колебаний измерительного прибора выражается формулой

$$A(\tau) = \frac{k\tau^2}{\sqrt{(T^2-\tau^2)^2 + nT^2\tau^2}},$$

где $T = 6\,\text{s}$ — период собственных колебаний прибора, $n = 1{,}5$. При каком периоде вынуждающей силы τ амплитуда колебаний будет наибольшей?

Задача 3 (Баллистика)

На Луне ускорение свободного падения $g = 1{,}6\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$. Тело бросают со скоростью $v_0 = 8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ под углом α к горизонту. Пользуясь формулой $R(\alpha) = \dfrac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$, найдите наибольшую возможную дальность полёта тела.

Задача 4 (Оптика)

Два источника света с силами света $I_1 = 50\,\text{cd}$ и $I_2 = 400\,\text{cd}$ расположены на расстоянии $L = 9\,\text{m}$ друг от друга. Суммарная освещённость точки между ними на расстоянии x от первого источника вычисляется по формуле $E(x) = \dfrac{I_1}{x^2} + \dfrac{I_2}{(L-x)^2}$. На каком расстоянии x от первого источника освещённость будет наименьшей?

Задача 5 (Экономика)

Затраты на изготовление партии деталей размера x вычисляются по формуле $C(x) = 5x + \dfrac{180}{x}$ (тыс. руб.), $x > 0$. При каком значении x затраты будут наименьшими?

Задача 6 (Термодинамика)

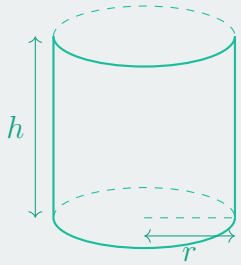
Скорость выделения теплоты при протекании реакции меняется по закону $Q(t) = A\,t\,e^{-0{,}25t}$, $t \geqslant 0$. В какой момент времени t скорость выделения теплоты максимальна?

Задача 7 (Электродинамика)

Генератор имеет ЭДС $\varepsilon = 40\,\text{V}$ и внутреннее сопротивление $r = 4\,\Omega$. Пользуясь формулой из задачи 1, найдите наибольшую возможную мощность, которая может быть выделена на нагрузке.

Задача 8 (Инженерная гидравлика)

Открытый сверху цилиндрический резервуар для воды должен вмещать объём $V = 8\pi$ м^3. Расход металла на его изготовление (площадь дна и боковой поверхности) вычисляется по формуле $S(r) = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$, где r — радиус основания резервуара. При каком значении r расход металла будет наименьшим?



Задача 9 (Экономика)

Затраты на перевозку груза вычисляются по формуле $C(x) = 3x + \dfrac{300}{x}$ (тыс. руб.), где x — некоторый параметр перевозки, $x > 0$. При каком значении x затраты будут наименьшими?

Задача 10 (Термодинамика)

Мощность нагрева некоторого устройства меняется по закону $Q(t) = A\,t\,e^{-0{,}2t}$, $t \geqslant 0$. В какой момент времени t мощность нагрева будет наибольшей?

ТАБЛИЦА ОТВЕТОВ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

№	Тема	Ответ
1	Электродинамика (реостат)	$R = 5\,\Omega$
2	Механика (резонанс)	$\tau = 12\,\text{s}$
3	Баллистика	$R_{\max} = 40\,\text{m}$
4	Оптика (освещённость)	$x = 3\,\text{m}$
5	Экономика (партия деталей)	$x = 6$
6	Термодинамика (тепловыделение)	$t = 4\,\text{s}$
7	Электродинамика (мощность)	$P_{\max} = 100\,\text{W}$
8	Гидравлика (резервуар)	$r = 2\,\text{m}$
9	Экономика (перевозка)	$x = 10$
10	Термодинамика (нагрев)	$t = 5\,\text{s}$

Чек-лист проверки решения №17 перед сдачей

- ✓ Я явно указал переменную и её область допустимых значений (ОДЗ).
- ✓ Я записал функцию, которую нужно максимизировать/минимизировать.
- ✓ Я правильно взял производную (проверил правило сложной функции/частного).
- ✓ Я приравнял производную к нулю и нашел критические точки.
- ✓ Я построил числовую ось, расставил знаки производной и сделал вывод о максимуме/минимуме.
- ✓ Я перечитал вопрос задачи и убедился, что мой ответ отвечает именно на него (а не является значением функции, если спрашивали аргумент, и наоборот).
- ✓ Мой ответ имеет физический смысл (положительное время, реалистичный угол и т.д.).

Удачи на экзамене!