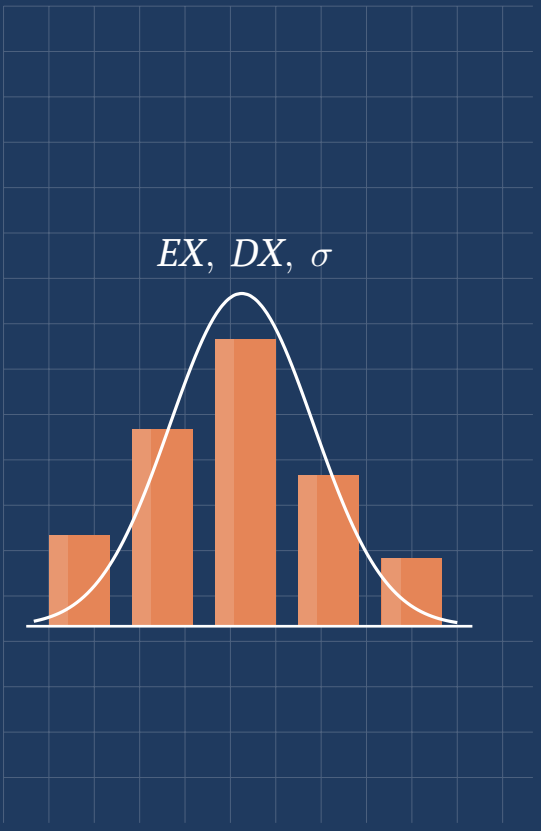
Math & AI

@mathaiedu

ЕГЭ 2027

Математика
профильный уровень



Задание 6. Случайные величины

Распределения, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение

- 113 задач, сгруппированных по типам
- Подробные решения к каждой задаче
- Справочный блок и таблица ответов

Введение

Составлено по проектам спецификации и кодификатора ФИПИ ЕГЭ-2027; версия от сентября 2026 года. Документы ФИПИ имеют статус проектов и открыты для обсуждения до 30 сентября 2026 г., поэтому окончательная версия может отличаться. Актуальные материалы: fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory.

Пособие посвящено заданию 6 профильного ЕГЭ по математике 2027 года. По проекту спецификации это задание повышенного уровня с кратким ответом: оно оценивается в 1 балл, а выпускнику профильного уровня на него отводится около 8 минут. Задание проверяет умение оперировать понятиями «случайная величина», «распределение вероятностей», «математическое ожидание», «дисперсия», «стандартное отклонение», а также использовать функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений. Ответ — целое число или конечная десятичная дробь.

Все 113 задач сгруппированы по двадцати типам. Типы 1–9 — дискретные распределения, заданные таблицей, и сюжетные задачи. Типы 10–20 — классические распределения (биномиальное, геометрическое, равномерное, показательное, нормальное), функция распределения и плотность, суммы случайных величин, метод индикаторов и закон больших чисел. Каждая задача рассчитана примерно на 8 минут.

Структура пособия

- **Часть I** — условия всех задач с полями для ответа. Её удобно распечатать и выдать ученику.
- **Часть II** — те же условия с подробными решениями.
- **Часть III** — сводная таблица ответов.

Как работать с пособием. Прочитайте справочный блок и решайте задачи одного типа подряд. Типичные ошибки: перепутать $E(X^2)$ и $(EX)^2$; складывать стандартные отклонения вместо дисперсий; забыть, что $D(aX) = a^2DX$; для непрерывной величины искать «вероятность значения» вместо вероятности промежутка.

Справочный блок

Закон распределения	значения $x_1, \dots, x_n$, вероятности $p_1, \dots, p_n$, $p_1 + \dots + p_n = 1$
Характеристики	$EX = \sum x_k p_k, \quad DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2, \quad \sigma(X) = \sqrt{DX}$
Свойства	$E(aX + b) = a\,EX + b, \quad D(aX + b) = a^2 DX, \quad E(X + Y) = EX + EY$
Независимые X, Y	$D(X + Y) = D(X - Y) = DX + DY$
Биномиальное	$P(X = k) = C_n^k\, p^k q^{n-k}, \quad EX = np, \quad DX = npq$
Геометрическое	$P(X = k) = q^{k-1}p, \quad EX = \dfrac{1}{p}, \quad DX = \dfrac{q}{p^2}$
Функция распределения	$F(x) = P(X < x)$ (в некоторых источниках $F(x) = P(X \le x)$; для непрерывных величин разницы нет); для непрерывной величины $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
Плотность $f(x)$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \quad P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx$
Равномерное на $[a;b]$	$f(x) = \dfrac{1}{b-a}, \quad EX = \dfrac{a+b}{2}, \quad DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
Показательное	$P(T > t) = e^{-\lambda t}, \quad ET = \dfrac{1}{\lambda}, \quad DT = \dfrac{1}{\lambda^2}$
Нормальное	$EX = \mu$, $DX = \sigma^2$, плотность симметрична относительно μ; $P(\lvert X - \mu\rvert < 3\sigma) \approx 0{,}997$
Среднее n величин	$D(X_1 + \dots + X_n) = nDX, \quad D\bar{X} = \dfrac{DX}{n}, \quad \sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (независимые, одинаково распределённые)

Содержание

Введение **2**

Часть I. Условия задач **6**

Тип 1. Математическое ожидание . . . 6
Тип 2. Дисперсия . . . 7
2.1. Десятичные дроби . . . 7
2.2. Обыкновенные дроби . . . 9
Тип 3. Стандартное отклонение . . . 10
Тип 4. Неизвестные вероятности . . . 11
Тип 5. Вероятность события . . . 12
Тип 6. Лотереи . . . 13
Тип 7. Страхование . . . 14
Тип 8. Покупки упаковками . . . 14
Тип 9. Свойства EX и DX . . . 15
Тип 10. Биномиальное распределение . . . 16
Тип 11. Геометрическое распределение . . . 16
Тип 12. Суммы случайных величин . . . 17
Тип 13. Функция распределения . . . 17
Тип 14. Равномерное распределение . . . 18
Тип 15. Показательное распределение . . . 19
Тип 16. Нормальное распределение . . . 19
Тип 17. Плотность распределения . . . 20
Тип 18. Составление закона распределения . . . 20
Тип 19. Метод индикаторов . . . 21
Тип 20. Среднее большого числа измерений . . . 21

Часть II. Решения **23**

Тип 1. Математическое ожидание . . . 23
Тип 2. Дисперсия . . . 25
2.1. Десятичные дроби . . . 25
2.2. Обыкновенные дроби . . . 28
Тип 3. Стандартное отклонение . . . 30
Тип 4. Неизвестные вероятности . . . 32
Тип 5. Вероятность события . . . 34
Тип 6. Лотереи . . . 36
Тип 7. Страхование . . . 38

Тип 8. Покупки упаковками 39
Тип 9. Свойства EX и DX 40
Тип 10. Биномиальное распределение 41
Тип 11. Геометрическое распределение 42
Тип 12. Суммы случайных величин 43
Тип 13. Функция распределения 44
Тип 14. Равномерное распределение 46
Тип 15. Показательное распределение 47
Тип 16. Нормальное распределение 48
Тип 17. Плотность распределения 49
Тип 18. Составление закона распределения 50
Тип 19. Метод индикаторов 51
Тип 20. Среднее большого числа измерений 52

Часть III. Ответы **53**

Часть I. Условия задач

Ответ в каждой задаче — целое число или конечная десятичная дробь.

Тип 1. Математическое ожидание

Закон распределения задан таблицей; найдите EX.

1 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-1	2	4	5	8
Вероятность	0,05	0,45	0,1	0,05	0,35

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

2 Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

3 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	2	5	7	9
Вероятность	0,3	0,05	0,1	0,55

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

4 Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

5 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-3	4	5	6	9
Вероятность	0,1	0,2	0,35	0,3	0,05

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

6 Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & 10 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

7 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-5	-3	-1	4	5
Вероятность	0,1	0,2	0,05	0,3	0,35

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

8 Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 0{,}05 & 0{,}65 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____.

Тип 2. Дисперсия

Найдите дисперсию дискретной случайной величины.

2.1. Десятичные дроби

Вероятности заданы десятичными дробями.

9 Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	2	3	5
Вероятность	0,3	0,6	0,1

Ответ: _____.

10 Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

11 Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-1	1	2	3
Вероятность	0,3	0,2	0,3	0,2

Ответ: _____.

12 Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

13 Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-3	1	3
Вероятность	0,4	0,2	0,4

Ответ: _____.

14 Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

15 Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-3	3	6
Вероятность	0,1	0,6	0,3

Ответ: _____.

16 Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

2.2. Обыкновенные дроби

Вероятности заданы обыкновенными дробями; ответ — конечная десятичная дробь или целое число.

17 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

18 Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 4 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

19 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

20 Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

21 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____.

22 Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

Тип 3. Стандартное отклонение

Найдите $\sigma = \sqrt{DX}$.

23 Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

24 Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

25 Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

26 Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0{,}08 & 0{,}84 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

27 Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} -12 & -2 & 8 \\ 0{,}18 & 0{,}64 & 0{,}18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

28 Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \end{pmatrix}.$$

Ответ: _____.

Тип 4. Неизвестные вероятности

В законе распределения часть вероятностей не указана.

29 В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	-2	0	1	6
Вероятность	p	0,05	0,45	0,25

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____ .

30 В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	0	2	4	6
Вероятность	0,05	0,1	p	0,75

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____ .

31 В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	-4	-2	5	7
Вероятность	p	0,2	0,15	0,55

Найдите математическое ожидание EX.

Ответ: _____ .

32 Случайная величина X имеет распределение, в котором две вероятности p и q неизвестны:

Значение X	-4	-3	6	8
Вероятность	p	0,05	q	0,55

Известно, что $EX = 3{,}65$. Найдите p.

Ответ: _____ .

33 Случайная величина X имеет распределение, в котором две вероятности p и q неизвестны:

Значение X	-1	1	4	6
Вероятность	p	0,2	q	0,45

Известно, что $EX = 3{,}8$. Найдите p.

Ответ: _____ .

Тип 5. Вероятность события

Найдите вероятность того, что случайная величина попадёт в заданное множество.

34 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	0	1	3	4	6	8
Вероятность	0,4	0,05	0,35	0,05	0,1	0,05

Найдите вероятность события $(1{,}5 < X \leq 5)$.

Ответ: _____.

35 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 7 & 8 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $(X \geq 4)$.

Ответ: _____.

36 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-2	-1	3	6	7	8
Вероятность	0,15	0,05	0,15	0,5	0,1	0,05

Найдите вероятность события $(X < 2{,}7)$.

Ответ: _____.

37 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $(|X| \leq 2)$.

Ответ: _____.

38 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-2	-1	0	3	5	7
Вероятность	0,15	0,15	0,25	0,2	0,05	0,2

Найдите вероятность события $(-1 < X < 6)$.

Ответ: _____.

Тип 6. Лотереи

Математическое ожидание выигрыша.

39 Для благотворительной лотереи выпущено 20 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	50	200	1000	5000	20 000
Число билетов	400	100	20	4	1

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

40 Для школьной ярмарки выпущено 10 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	100	500	2000	10 000
Число билетов	300	40	10	2

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

41 Для городской лотереи выпущено 50 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	100	1000	10 000	100 000
Число билетов	2500	150	10	1

Остальные билеты не выигрывают. Билет стоит 30 руб. Найдите математическое ожидание чистого выигрыша (выигрыш минус цена билета) покупателя одного билета. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

42 Для лотереи к юбилею библиотеки выпущено 25 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	200	1000	5000	50 000
Число билетов	500	100	12	1

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

43 Для новогодней лотереи выпущено 40 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	50	500	3000	30 000
Число билетов	2000	200	20	2

Остальные билеты не выигрывают. Билет стоит 20 руб. Найдите математическое ожидание чистого выигрыша (выигрыш минус цена билета) покупателя одного билета. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

Тип 7. Страхование

Цена полиса, ожидаемый доход, размер выплаты.

44 Страховая компания предлагает страховую защиту смартфонов. При наступлении страхового случая клиент получает 40 000 руб. Вероятность страхового случая по одному договору равна 0,03. Компания хочет, чтобы математическое ожидание её дохода от одного договора составляло 300 руб. Какой должна быть цена полиса (в рублях)?

Ответ: _____ .

45 Страховая компания предлагает страхование багажа на время поездки. При наступлении страхового случая клиент получает 60 000 руб. Вероятность страхового случая по одному договору равна 0,005. Компания хочет, чтобы математическое ожидание её дохода от одного договора составляло 450 руб. Какой должна быть цена полиса (в рублях)?

Ответ: _____ .

46 Компания оформляет страхование велосипедов от кражи. Полис стоит 1600 руб., при страховом случае выплачивается 50 000 руб. Вероятность страхового случая по отдельному полису равна 0,02. Найдите математическое ожидание дохода компании от продажи одного полиса. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

47 Компания оформляет страхование квартир от затопления. Полис стоит 1500 руб., при страховом случае выплачивается 200 000 руб. Вероятность страхового случая по отдельному полису равна 0,004. Найдите математическое ожидание дохода компании от продажи одного полиса. Ответ дайте в рублях.

Ответ: _____ .

48 Компания оформляет страхование дачных домов от пожара: полис стоит 4000 руб., вероятность страхового случая по одному договору равна 0,005. Компания рассчитывает, что математическое ожидание её дохода от одного полиса будет не меньше 1500 руб. Какую наибольшую выплату (в рублях) можно установить при страховом случае?

Ответ: _____ .

Тип 8. Покупки упаковками

Сколько товара в среднем покупает один человек.

49 Батарейки продаются поштучно, а также блистерами по 4 и по 8 штук. Из каждых 100 посетителей отдела в среднем 65 ничего не покупают, 15 покупают одну батарейку, 12 берут блистер по 4 штуки, 8 берут блистер по 8 штук. Найдите математическое ожидание числа батареек, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Ответ: _____ .

50 Сырки в магазине продаются поштучно или коробками по 6 штук. Из каждых 100 покупателей магазина в среднем 71 сырки не берут, 22 берут один сырок, 7 берут коробку. Найдите математическое ожидание числа сырков, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Ответ: _____ .

51 Тетради продаются поштучно и в пачках по 5 и по 12 штук. Из каждых 100 посетителей канцелярского магазина в среднем 62 тетради не покупают, 18 покупают одну тетрадь, 14 покупают пачку по 5, 6 покупают пачку по 12. Найдите математическое ожидание числа тетрадей, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Ответ: _____ .

52 Мандарины на рынке продают поштучно, а также сетками по 10 и по 15 штук. Из каждых 100 подошедших к прилавку в среднем 65 уходят без покупки, 12 покупают один мандарин, 15 берут сетку по 10, 8 берут сетку по 15. Найдите математическое ожидание числа мандаринов, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Ответ: _____ .

Тип 9. Свойства EX и DX

Линейные преобразования случайной величины.

53 Известно, что $EX = 2{,}4$. Найдите $E(5X - 7)$.

Ответ: _____ .

54 Дисперсия случайной величины X равна $1{,}5$. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 3 - 4X$.

Ответ: _____ .

55 Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию случайной величины $Y = 2X + 9$.

Ответ: _____ .

56 Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	0	1	3
Вероятность	0,2	0,5	0,3

Случайная величина Y связана с X равенством $Y = 10 - 3X$. Найдите EY.

Ответ: _____ .

Тип 10. Биномиальное распределение

Число успехов в серии независимых испытаний.

57 Симметричную монету бросают 100 раз. Случайная величина X — число выпадений орла. Найдите дисперсию DX.

Ответ: _____ .

58 Игральную кость бросают 72 раза. Случайная величина X — число выпадений шестёрки. Найдите DX.

Ответ: _____ .

59 Стрелок делает 25 независимых выстрелов, вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найдите стандартное отклонение числа попаданий.

Ответ: _____ .

60 Случайная величина X имеет биномиальное распределение, причём $EX = 12$, $DX = 4{,}8$. Найдите число испытаний n.

Ответ: _____ .

61 Вероятность того, что зашедший в магазин посетитель сделает покупку, равна 0,5. Зашли 4 посетителя, их решения независимы. Случайная величина X — число сделавших покупку. Найдите $P(X = 2)$.

Ответ: _____ .

62 Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}5$. Найдите $E\left(X^2\right)$.

Ответ: _____ .

Тип 11. Геометрическое распределение

Число испытаний до первого успеха.

63 Баскетболист бросает мяч в кольцо до первого попадания. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,8, броски независимы. Найдите математическое ожидание числа бросков.

Ответ: _____ .

64 Независимые испытания проводят до первого успеха. Математическое ожидание числа проведённых испытаний равно 4. Найдите вероятность успеха в одном испытании.

Ответ: _____ .

65 Симметричную монету бросают до первого выпадения орла. Найдите дисперсию числа бросков.

Ответ: _____ .

66 Случайная величина X — число независимых испытаний до первого успеха (включительно), $EX = 3$. Найдите DX.

Ответ: _____ .

67 Автомат выдаёт приз с вероятностью 0,3 независимо от предыдущих попыток. Игрок пытается до первого приза. Найдите вероятность того, что понадобится ровно 3 попытки.

Ответ: _____.

68 Вероятность успешной отправки сообщения с одной попытки равна 0,2. Попытки повторяют до первого успеха, они независимы. Найдите вероятность того, что понадобится больше трёх попыток.

Ответ: _____.

Тип 12. Суммы случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия суммы и разности.

69 Известно, что $EX = 3$ и $EY = -2$. Найдите $E(2X - 3Y + 1)$.

Ответ: _____.

70 Случайные величины X и Y независимы, $DX = 1{,}5$, $DY = 2$. Найдите $D(2X - Y)$.

Ответ: _____.

71 Независимые случайные величины X и Y имеют стандартные отклонения 3 и 4 соответственно. Найдите стандартное отклонение величины $X + Y$.

Ответ: _____.

72 Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найдите $D(X + Y)$.

Ответ: _____.

73 Время дороги ученика до школы (в минутах) в разные дни — независимые одинаково распределённые случайные величины с дисперсией 2. Найдите дисперсию суммарного времени дороги за 5 дней.

Ответ: _____.

Тип 13. Функция распределения

Вероятности и характеристики по функции распределения.

74 Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 3, \\ 0{,}8, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найдите $P(X = 3)$.

Ответ: _____.

75 Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ 0{,}2, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}7, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите EX.

Ответ: _____.

76 Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите $P(1 < X < 2)$.

Ответ: _____.

77 Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найдите $P(X > 3)$.

Ответ: _____.

78 Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{4}, & 1 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найдите число m, для которого $P(X < m) = 0{,}3$.

Ответ: _____.

Тип 14. Равномерное распределение

Случайная точка на отрезке, время ожидания.

79 Автобусы ходят строго с интервалом 20 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент, и время его ожидания распределено равномерно на отрезке $[0; 20]$ (в минутах). Найдите вероятность того, что ждать придётся меньше 5 минут.

Ответ: _____.

80 Случайная величина T распределена равномерно на отрезке $[0; 12]$. Найдите DT.

Ответ: _____.

81 Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2; 8]$. Найдите $E\left(X^2\right)$.

Ответ: _____.

82 Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-3; 7]$. Найдите $P(|X| < 2)$.

Ответ: _____.

83 Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0; L]$, её дисперсия равна 3. Найдите L.

Ответ: _____.

Тип 15. Показательное распределение

Время безотказной работы, время ожидания, распад.

84 Время безотказной работы прибора (в часах) имеет показательное распределение, среднее время безотказной работы равно 800 ч. Найдите параметр λ этого распределения.

Ответ: _____.

85 Время обслуживания одного клиента (в минутах) распределено по показательному закону, среднее время обслуживания равно 5 мин. Найдите дисперсию времени обслуживания.

Ответ: _____.

86 Срок службы детали T (в сутках) имеет показательное распределение, причём $P(T > 100) = 0{,}9$. Найдите $P(T > 300)$.

Ответ: _____.

87 Время ожидания звонка T (в минутах) имеет показательное распределение, $P(T > 10) = 0{,}8$. Найдите $P(10 < T \leq 20)$.

Ответ: _____.

88 Время до распада радиоактивного ядра имеет показательное распределение. Вероятность того, что ядро не распадётся за 30 лет, равна 0,5. Найдите вероятность того, что оно не распадётся за 90 лет.

Ответ: _____.

Тип 16. Нормальное распределение

Симметрия, правило трёх сигм.

89 Рост взрослого мужчины X (в сантиметрах) распределён нормально со средним 170 см и стандартным отклонением 6 см. Известно, что $P(X < 164) = 0{,}16$. Найдите $P(164 < X < 176)$.

Ответ: _____.

90 Масса пакета с крупой X (в граммах) распределена нормально, $EX = 1000$. Известно, что $P(X > 1010) = 0{,}1$. Найдите $P(990 < X < 1000)$.

Ответ: _____.

91 Случайная величина X распределена нормально, $EX = 20$, причём $P(X < 14) = 0{,}02$. Найдите $P(X < 26)$.

Ответ: _____ .

92 Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 2 и стандартным отклонением 1,5. Найдите дисперсию величины $Y = 3X - 5$.

Ответ: _____ .

93 Длина детали (в миллиметрах) распределена нормально, её математическое ожидание равно 40. Практически все детали (по правилу трёх сигм) имеют длину от 39,1 до 40,9 мм, т. е. этот промежуток — это $(\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma)$. Найдите стандартное отклонение σ.

Ответ: _____ .

Тип 17. Плотность распределения

Непрерывная случайная величина с заданной плотностью.

94 Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = cx$ при $0 \le x \le 2$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Найдите c.

Ответ: _____ .

95 Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \dfrac{x}{2}$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите $P(X < 1)$.

Ответ: _____ .

96 Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \dfrac{2x}{9}$ при $0 \le x \le 3$ и 0 при остальных x. Найдите EX.

Ответ: _____ .

97 Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = cx^2$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите c.

Ответ: _____ .

98 Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \dfrac{3x^2}{8}$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите DX.

Ответ: _____ .

Тип 18. Составление закона распределения

Закон распределения нужно получить из описания опыта.

99 В коробке 5 ручек, из них 2 не пишут. Наугад берут 2 ручки. Случайная величина X — число неисправных ручек среди взятых. Найдите EX.

Ответ: _____ .

100 Из 6 лотерейных билетов 2 выигрышные. Наугад берут 3 билета. Случайная величина X — число выигрышных среди них. Найдите DX.

Ответ: _____ .

101 Из чисел 1, 2, 3, 4, 5 случайным образом выбирают два различных. Случайная величина X — большее из выбранных чисел. Найдите EX.

Ответ: _____ .

102 Стрелок стреляет по мишени до первого попадания, но делает не более трёх выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Случайная величина X — число сделанных выстрелов. Найдите EX.

Ответ: _____ .

103 В урне 4 белых шара и 1 чёрный. Шары вынимают по одному без возвращения, пока не появится чёрный. Случайная величина X — число вынутых шаров (включая чёрный). Найдите DX.

Ответ: _____ .

Тип 19. Метод индикаторов

Сумма индикаторов событий и линейность математического ожидания.

104 Три стрелка независимо стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания равны 0,6, 0,7 и 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий.

Ответ: _____ .

105 Три стрелка независимо стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания равны 0,6, 0,7 и 0,9. Найдите дисперсию числа попаданий.

Ответ: _____ .

106 В контрольной 4 задачи. Вероятности того, что Петя решит первую, вторую, третью и четвёртую задачу, равны 0,9; 0,8; 0,5 и 0,3. Найдите математическое ожидание числа решённых задач.

Ответ: _____ .

107 Пять писем случайным образом разложили по пяти подписанным конвертам, по одному в каждый. Найдите математическое ожидание числа писем, попавших в свои конверты.

Ответ: _____ .

108 Симметричную монету бросают 10 раз. Найдите математическое ожидание числа пар соседних бросков с одинаковым результатом.

Ответ: _____ .

Тип 20. Среднее большого числа измерений

Закон больших чисел в числах.

109 Стандартное отклонение результата одного измерения равно 0,6. Проведено 36 независимых измерений. Найдите стандартное отклонение среднего арифметического результатов.

Ответ: _____ .

110 Дисперсия результата одного опыта равна 2,5. Проведено 50 независимых опытов. Найдите дисперсию среднего арифметического их результатов.

Ответ: _____ .

111 Стандартное отклонение одного измерения равно 1,2. Какое наименьшее число независимых измерений нужно провести, чтобы стандартное отклонение их среднего арифметического было не больше 0,3?

Ответ: _____ .

112 Масса одного яблока — случайная величина со стандартным отклонением 20 г. В ящик кладут 100 яблок, их массы независимы. Найдите стандартное отклонение общей массы яблок в ящике (в граммах).

Ответ: _____ .

113 Симметричную монету бросают 400 раз. Найдите стандартное отклонение доли выпавших орлов (отношения числа орлов к числу бросков).

Ответ: _____ .

Часть II. Решения

Условие каждой задачи повторено в рамке, ниже приведено решение.

Тип 1. Математическое ожидание

Используется формула $EX = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_np_n$.

1. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-1	2	4	5	8
Вероятность	0,05	0,45	0,1	0,05	0,35

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = (-1)\cdot 0{,}05 + 2\cdot 0{,}45 + 4\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}05 + 8\cdot 0{,}35 = -0{,}05 + 0{,}9 + 0{,}4 + 0{,}25 + 2{,}8 = 4{,}3.$$

Ответ: 4,3

---

2. Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0{,}45 & 0{,}25 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = 1\cdot 0{,}45 + 2\cdot 0{,}25 + 10\cdot 0{,}3 = 0{,}45 + 0{,}5 + 3 = 3{,}95.$$

Ответ: 3,95

---

3. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	2	5	7	9
Вероятность	0,3	0,05	0,1	0,55

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = 2\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}05 + 7\cdot 0{,}1 + 9\cdot 0{,}55 = 0{,}6 + 0{,}25 + 0{,}7 + 4{,}95 = 6{,}5.$$

Ответ: 6,5

---

4. Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = (-4)\cdot 0{,}5 + (-3)\cdot 0{,}2 + (-2)\cdot 0{,}1 + 0\cdot 0{,}2 = -2 - 0{,}6 - 0{,}2 + 0 = -2{,}8.$$

Ответ: $-2{,}8$

---

5. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-3	4	5	6	9
Вероятность	0,1	0,2	0,35	0,3	0,05

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = (-3)\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}35 + 6\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}05 = -0{,}3 + 0{,}8 + 1{,}75 + 1{,}8 + 0{,}45 = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5

---

6. Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 & 10 \\ 0{,}45 & 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = (-5)\cdot 0{,}45 + (-2)\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}4 + 10\cdot 0{,}05 = -2{,}25 - 0{,}2 + 1{,}2 + 0{,}5 = -0{,}75.$$

Ответ: $-0{,}75$

---

7. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-5	-3	-1	4	5
Вероятность	0,1	0,2	0,05	0,3	0,35

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = (-5)\cdot 0{,}1 + (-3)\cdot 0{,}2 + (-1)\cdot 0{,}05 + 4\cdot 0{,}3 + 5\cdot 0{,}35 = -0{,}5 - 0{,}6 - 0{,}05 + 1{,}2 + 1{,}75 = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8

---

8. Известен закон распределения случайной величины X:

$$X \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 10 \\ 0{,}05 & 0{,}65 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины равно сумме произведений её значений на вероятности этих значений:

$$EX = 5\cdot 0{,}05 + 6\cdot 0{,}65 + 10\cdot 0{,}3 = 0{,}25 + 3{,}9 + 3 = 7{,}15.$$

Ответ: 7,15

Тип 2. Дисперсия

2.1. Десятичные дроби

Используется формула $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$.

9. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	2	3	5
Вероятность	0,3	0,6	0,1

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}1 = 2{,}9.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}6 + 5^2\cdot 0{,}1 = 9{,}1.$$

Тогда

$$DX = 9{,}1 - 2{,}9^2 = 9{,}1 - 8{,}41 = 0{,}69.$$

Ответ: 0,69

---

10. Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-2)\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}5 + 5\cdot 0{,}2 = 1{,}4.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-2)^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}5 + 5^2\cdot 0{,}2 = 8{,}2.$$

Тогда

$$DX = 8{,}2 - 1{,}4^2 = 8{,}2 - 1{,}96 = 6{,}24.$$

Ответ: 6,24

---

11. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-1	1	2	3
Вероятность	0,3	0,2	0,3	0,2

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-1)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}2 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}2 = 1{,}1.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-1)^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}2 + 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}2 = 3{,}5.$$

Тогда

$$DX = 3{,}5 - 1{,}1^2 = 3{,}5 - 1{,}21 = 2{,}29.$$

Ответ: 2,29

---

12. Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-3)\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}6 + 5\cdot 0{,}1 = 0{,}2.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2\cdot 0{,}3 + 1^2\cdot 0{,}6 + 5^2\cdot 0{,}1 = 5{,}8.$$

Тогда

$$DX = 5{,}8 - 0{,}2^2 = 5{,}8 - 0{,}04 = 5{,}76.$$

Ответ: 5,76

---

13. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-3	1	3
Вероятность	$0{,}4$	$0{,}2$	$0{,}4$

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-3)\cdot 0{,}4 + 1\cdot 0{,}2 + 3\cdot 0{,}4 = 0{,}2.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2\cdot 0{,}4 + 1^2\cdot 0{,}2 + 3^2\cdot 0{,}4 = 7{,}4.$$

Тогда

$$DX = 7{,}4 - 0{,}2^2 = 7{,}4 - 0{,}04 = 7{,}36.$$

Ответ: 7,36

---

14. Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-2)\cdot 0{,}4 + 2\cdot 0{,}3 + 3\cdot 0{,}3 = 0{,}7.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-2)^2\cdot 0{,}4 + 2^2\cdot 0{,}3 + 3^2\cdot 0{,}3 = 5{,}5.$$

Тогда

$$DX = 5{,}5 - 0{,}7^2 = 5{,}5 - 0{,}49 = 5{,}01.$$

Ответ: 5,01

---

15. Найдите дисперсию случайной величины X, заданной законом распределения

Значение X	-3	3	6
Вероятность	$0{,}1$	$0{,}6$	$0{,}3$

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-3)\cdot 0{,}1 + 3\cdot 0{,}6 + 6\cdot 0{,}3 = 3{,}3.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2\cdot 0{,}1 + 3^2\cdot 0{,}6 + 6^2\cdot 0{,}3 = 17{,}1.$$

Тогда

$$DX = 17{,}1 - 3{,}3^2 = 17{,}1 - 10{,}89 = 6{,}21.$$

Ответ: 6,21

16. Случайная величина X принимает значения с вероятностями, указанными в таблице.

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 6 \\ 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Воспользуемся формулой $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Найдём математическое ожидание:

$$EX = (-1) \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 = 3.$$

Найдём математическое ожидание квадрата:

$$E\left(X^2\right) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}1 + 6^2 \cdot 0{,}2 = 14{,}4.$$

Тогда

$$DX = 14{,}4 - 3^2 = 14{,}4 - 9 = 5{,}4.$$

Ответ: 5,4

2.2. Обыкновенные дроби

Удобно привести все дроби к общему знаменателю.

17. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 4.

$$EX = (-3) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{-3 - 1 + 0}{4} = -1,$$

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{4} + 0^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9 + 1 + 0}{4} = \frac{5}{2}.$$

$$DX = \frac{5}{2} - (-1)^2 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Ответ: 1,5

18. Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 4 \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 8.

$$EX = (-3)\cdot\frac{3}{8} + 0\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{8} = \frac{-9+0+3+12}{8} = \frac{3}{4},$$

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2\cdot\frac{3}{8} + 0^2\cdot\frac{1}{8} + 3^2\cdot\frac{1}{8} + 4^2\cdot\frac{3}{8} = \frac{27+0+9+48}{8} = \frac{21}{2}.$$

$$DX = \frac{21}{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{21}{2} - \frac{9}{16} = \frac{159}{16} = 9{,}9375.$$

Ответ: 9,9375

---

19. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 3.

$$EX = 0\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{3} = \frac{0+3+6}{3} = 3,$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2\cdot\frac{1}{3} + 3^2\cdot\frac{1}{3} + 6^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{0+9+36}{3} = 15.$$

$$DX = 15 - 3^2 = 15 - 9 = 6.$$

Ответ: 6

---

20. Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 6.

$$EX = 0\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{3} + 7\cdot\frac{1}{2} = \frac{0+12+21}{6} = \frac{11}{2},$$

$$E\left(X^2\right) = 0^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{3} + 7^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{0+72+147}{6} = \frac{73}{2}.$$

$$DX = \frac{73}{2} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{73}{2} - \frac{121}{4} = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Ответ: 6,25

21. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию DX.

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 12.

$$EX = (-3)\cdot\frac{3}{4} + (-2)\cdot\frac{1}{6} + 1\cdot\frac{1}{12} = \frac{-27-4+1}{12} = -\frac{5}{2},$$

$$E\left(X^2\right) = (-3)^2\cdot\frac{3}{4} + (-2)^2\cdot\frac{1}{6} + 1^2\cdot\frac{1}{12} = \frac{81+8+1}{12} = \frac{15}{2}.$$

$$DX = \frac{15}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Ответ: 1,25

22. Найдите дисперсию случайной величины X, распределение которой задано так:

$$X \sim \begin{pmatrix} 4 & 6 & 7 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Решение. Используем формулу $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$. Приведём дроби к общему знаменателю 5.

$$EX = 4\cdot\frac{3}{5} + 6\cdot\frac{1}{5} + 7\cdot\frac{1}{5} = \frac{12+6+7}{5} = 5,$$

$$E\left(X^2\right) = 4^2\cdot\frac{3}{5} + 6^2\cdot\frac{1}{5} + 7^2\cdot\frac{1}{5} = \frac{48+36+49}{5} = \frac{133}{5}.$$

$$DX = \frac{133}{5} - 5^2 = \frac{133}{5} - 25 = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

Ответ: 1,6

Тип 3. Стандартное отклонение

Сначала находим дисперсию, затем извлекаем корень.

23. Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DX}$, где $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$.

$$EX = 2\cdot 0{,}5 + 8\cdot 0{,}5 = 5, \qquad E\left(X^2\right) = 2^2\cdot 0{,}5 + 8^2\cdot 0{,}5 = 34.$$

$$DX = 34 - 5^2 = 9, \qquad \sigma = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3

24. Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DY}$, где $DY = E\left(Y^2\right) - (EY)^2$.

$$EY = (-1) \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}8 = 3, \qquad E\left(Y^2\right) = (-1)^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}8 = 13.$$

$$DY = 13 - 3^2 = 4, \qquad \sigma = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: 2

25. Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DX}$, где $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$.

$$EX = 0 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}9 = 9, \qquad E\left(X^2\right) = 0^2 \cdot 0{,}1 + 10^2 \cdot 0{,}9 = 90.$$

$$DX = 90 - 9^2 = 9, \qquad \sigma = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3

26. Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 0{,}08 & 0{,}84 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DY}$, где $DY = E\left(Y^2\right) - (EY)^2$.

$$EY = (-2) \cdot 0{,}08 + 3 \cdot 0{,}84 + 8 \cdot 0{,}08 = 3, \qquad E\left(Y^2\right) = (-2)^2 \cdot 0{,}08 + 3^2 \cdot 0{,}84 + 8^2 \cdot 0{,}08 = 13.$$

$$DY = 13 - 3^2 = 4, \qquad \sigma = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: 2

27. Найдите стандартное отклонение случайной величины X, если её распределение

имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} -12 & -2 & 8 \\ 0{,}18 & 0{,}64 & 0{,}18 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DX}$, где $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$.

$$EX = (-12)\cdot 0{,}18 + (-2)\cdot 0{,}64 + 8\cdot 0{,}18 = -2, \qquad E\left(X^2\right) = (-12)^2\cdot 0{,}18 + (-2)^2\cdot 0{,}64 + 8^2\cdot 0{,}18 = 40.$$

$$DX = 40 - (-2)^2 = 36, \qquad \sigma = \sqrt{36} = 6.$$

Ответ: 6

---

28. Вычислите среднее квадратическое (стандартное) отклонение случайной величины Y, заданной законом распределения

$$Y \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 0{,}32 & 0{,}36 & 0{,}32 \end{pmatrix}.$$

Решение. Стандартное отклонение равно корню из дисперсии: $\sigma = \sqrt{DY}$, где $DY = E\left(Y^2\right) - (EY)^2$.

$$EY = (-4)\cdot 0{,}32 + 1\cdot 0{,}36 + 6\cdot 0{,}32 = 1, \qquad E\left(Y^2\right) = (-4)^2\cdot 0{,}32 + 1^2\cdot 0{,}36 + 6^2\cdot 0{,}32 = 17.$$

$$DY = 17 - 1^2 = 16, \qquad \sigma = \sqrt{16} = 4.$$

Ответ: 4

Тип 4. Неизвестные вероятности

Используются условие $p_1 + \cdots + p_n = 1$ и формула для EX.

29. В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	-2	0	1	6
Вероятность	p	0,05	0,45	0,25

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Сумма вероятностей всех значений равна 1, поэтому

$$p = 1 - (0{,}05 + 0{,}45 + 0{,}25) = 0{,}25.$$

Теперь

$$EX = (-2)\cdot 0{,}25 + 0\cdot 0{,}05 + 1\cdot 0{,}45 + 6\cdot 0{,}25 = 1{,}45.$$

Ответ: 1,45

---

30. В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	0	2	4	6
Вероятность	0,05	0,1	p	0,75

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Сумма вероятностей всех значений равна 1, поэтому

$$p = 1 - (0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}75) = 0{,}1.$$

Теперь

$$EX = 0 \cdot 0{,}05 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}75 = 5{,}1.$$

Ответ: 5,1

---

31. В таблице указан закон распределения случайной величины X, одна из вероятностей неизвестна.

Значение X	-4	-2	5	7
Вероятность	p	0,2	0,15	0,55

Найдите математическое ожидание EX.

Решение. Сумма вероятностей всех значений равна 1, поэтому

$$p = 1 - (0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}55) = 0{,}1.$$

Теперь

$$EX = (-4) \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}15 + 7 \cdot 0{,}55 = 3{,}8.$$

Ответ: 3,8

---

32. Случайная величина X имеет распределение, в котором две вероятности p и q неизвестны:

Значение X	-4	-3	6	8
Вероятность	p	0,05	q	0,55

Известно, что $EX = 3{,}65$. Найдите p.

Решение. Сумма вероятностей равна 1, поэтому $p + q = 1 - (0{,}05 + 0{,}55) = 0{,}4$. Запишем математическое ожидание:

$$(-4) \cdot p + 6 \cdot q + (-3) \cdot 0{,}05 + 8 \cdot 0{,}55 = 3{,}65,$$

то есть $(-4) \cdot p + 6 \cdot q = 3{,}65 - 4{,}25 = -0{,}6$. Подставим $q = 0{,}4 - p$:

$$(-4) \cdot p + 6 \cdot (0{,}4 - p) = -0{,}6 \;\Rightarrow\; -10 \cdot p = -3 \;\Rightarrow\; p = 0{,}3.$$

При этом $q = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1 > 0$, так что распределение корректно.

Ответ: 0,3

---

33. Случайная величина X имеет распределение, в котором две вероятности p и q неизвестны:

Значение X	-1	1	4	6
Вероятность	p	0,2	q	0,45

Известно, что $EX = 3{,}8$. Найдите p.

Решение. Сумма вероятностей равна 1, поэтому $p + q = 1 - (0{,}2 + 0{,}45) = 0{,}35$. Запишем математическое ожидание:

$$(-1)\cdot p + 4\cdot q + 1\cdot 0{,}2 + 6\cdot 0{,}45 = 3{,}8,$$

то есть $(-1)\cdot p + 4\cdot q = 3{,}8 - 2{,}9 = 0{,}9$. Подставим $q = 0{,}35 - p$:

$$(-1)\cdot p + 4\cdot(0{,}35 - p) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; -5\cdot p = -0{,}5 \;\Rightarrow\; p = 0{,}1.$$

При этом $q = 0{,}35 - 0{,}1 = 0{,}25 > 0$, так что распределение корректно.

Ответ: 0,1

Тип 5. Вероятность события

Складываем вероятности подходящих значений.

34. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	0	1	3	4	6	8
Вероятность	0,4	0,05	0,35	0,05	0,1	0,05

Найдите вероятность события $(1{,}5 < X \le 5)$.

Решение. Событию $(1{,}5 < X \le 5)$ благоприятствуют значения 3, 4. Эти значения несовместны, поэтому вероятности складываются:

$$P(1{,}5 < X \le 5) = 0{,}35 + 0{,}05 = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4

35. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 7 & 8 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}35 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $(X \ge 4)$.

Решение. Событию $(X \ge 4)$ благоприятствуют значения 4, 7, 8. Эти значения несовместны, поэтому вероятности складываются:

$$P(X \ge 4) = 0{,}35 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}45.$$

Ответ: 0,45

36. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-2	-1	3	6	7	8
Вероятность	0,15	0,05	0,15	0,5	0,1	0,05

Найдите вероятность события $(X < 2{,}7)$.

Решение. Событию $(X < 2{,}7)$ благоприятствуют значения -2, -1. Эти значения несовместны, поэтому вероятности складываются:

$$P(X < 2{,}7) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2.$$

Ответ: 0,2

---

37. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 & 8 & 9 \\ 0{,}2 & 0{,}25 & 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}05 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Найдите вероятность события $(|X| \leq 2)$.

Решение. Событию $(|X| \leq 2)$ благоприятствуют значения 0, 1, 2. Эти значения несовместны, поэтому вероятности складываются:

$$P(|X| \leq 2) = 0{,}2 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6

---

38. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	-2	-1	0	3	5	7
Вероятность	0,15	0,15	0,25	0,2	0,05	0,2

Найдите вероятность события $(-1 < X < 6)$.

Решение. Событию $(-1 < X < 6)$ благоприятствуют значения 0, 3, 5. Эти значения несовместны, поэтому вероятности складываются:

$$P(-1 < X < 6) = 0{,}25 + 0{,}2 + 0{,}05 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5

Тип 6. Лотереи

Каждый выигрыш w имеет вероятность n/N.

39. Для благотворительной лотереи выпущено 20 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	50	200	1000	5000	20 000
Число билетов	400	100	20	4	1

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть X — выигрыш на один билет. Без выигрыша остаётся $20\,000 - 525 = 19\,475$ билетов, им соответствует значение $X = 0$, которое в сумму не входит. Каждое значение w принимается с вероятностью $\dfrac{n}{20\,000}$, где n — число таких билетов. Поэтому

$$EX = \frac{50 \cdot 400 + 200 \cdot 100 + 1000 \cdot 20 + 5000 \cdot 4 + 20\,000 \cdot 1}{20\,000} = \frac{100\,000}{20\,000} = 5.$$

Ответ: 5

40. Для школьной ярмарки выпущено 10 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	100	500	2000	10 000
Число билетов	300	40	10	2

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть X — выигрыш на один билет. Без выигрыша остаётся $10\,000 - 352 = 9648$ билетов, им соответствует значение $X = 0$, которое в сумму не входит. Каждое значение w принимается с вероятностью $\dfrac{n}{10\,000}$, где n — число таких билетов. Поэтому

$$EX = \frac{100 \cdot 300 + 500 \cdot 40 + 2000 \cdot 10 + 10\,000 \cdot 2}{10\,000} = \frac{90\,000}{10\,000} = 9.$$

Ответ: 9

41. Для городской лотереи выпущено 50 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	100	1000	10 000	100 000
Число билетов	2500	150	10	1

Остальные билеты не выигрывают. Билет стоит 30 руб. Найдите математическое ожидание чистого выигрыша (выигрыш минус цена билета) покупателя одного билета. Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть X — выигрыш на один билет. Без выигрыша остаётся $50\,000 - 2661 = 47\,339$ билетов, им соответствует значение $X = 0$, которое в сумму не входит. Каждое значение w принимается с вероятностью $\dfrac{n}{50\,000}$, где n — число таких билетов. Поэтому

$$EX = \frac{100 \cdot 2500 + 1000 \cdot 150 + 10\,000 \cdot 10 + 100\,000 \cdot 1}{50\,000} = \frac{600\,000}{50\,000} = 12.$$

Чистый выигрыш равен $Y = X - 30$, и по свойству математического ожидания $EY = EX - 30 = 12 - 30 = -18$. Отрицательное значение означает, что в среднем покупатель теряет деньги.

Ответ: -18

42. Для лотереи к юбилею библиотеки выпущено 25 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	200	1000	5000	50 000
Число билетов	500	100	12	1

Остальные билеты не выигрывают. Найдите математическое ожидание выигрыша на один случайно купленный билет. Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть X — выигрыш на один билет. Без выигрыша остаётся $25\,000 - 613 = 24\,387$ билетов, им соответствует значение $X = 0$, которое в сумму не входит. Каждое значение w принимается с вероятностью $\dfrac{n}{25\,000}$, где n — число таких билетов. Поэтому

$$EX = \frac{200 \cdot 500 + 1000 \cdot 100 + 5000 \cdot 12 + 50\,000 \cdot 1}{25\,000} = \frac{310\,000}{25\,000} = 12{,}4.$$

Ответ: 12,4

43. Для новогодней лотереи выпущено 40 000 билетов. Выигрыши распределены так:

Выигрыш, руб.	50	500	3000	30 000
Число билетов	2000	200	20	2

Остальные билеты не выигрывают. Билет стоит 20 руб. Найдите математическое ожидание чистого выигрыша (выигрыш минус цена билета) покупателя одного билета. Ответ дайте в рублях.

Решение. Пусть X — выигрыш на один билет. Без выигрыша остаётся $40\,000 - 2222 = 37\,778$ билетов, им соответствует значение $X = 0$, которое в сумму не входит. Каждое значение w принимается с вероятностью $\dfrac{n}{40\,000}$, где n — число таких билетов. Поэтому

$$EX = \frac{50 \cdot 2000 + 500 \cdot 200 + 3000 \cdot 20 + 30\,000 \cdot 2}{40\,000} = \frac{320\,000}{40\,000} = 8.$$

Чистый выигрыш равен $Y = X - 20$, и по свойству математического ожидания $EY = EX - 20 = 8 - 20 = -12$. Отрицательное значение означает, что в среднем покупатель теряет деньги.

Ответ: -12

Тип 7. Страхование

Доход по договору: цена полиса минус выплата, если случай наступил.

44. Страховая компания предлагает страховую защиту смартфонов. При наступлении страхового случая клиент получает 40 000 руб. Вероятность страхового случая по одному договору равна 0,03. Компания хочет, чтобы математическое ожидание её дохода от одного договора составляло 300 руб. Какой должна быть цена полиса (в рублях)?

Решение. Пусть c — цена полиса. Доход компании X по одному договору равен c, если страхового случая не было (вероятность 0,97), и $c - 40\,000$, если он произошёл (вероятность 0,03). Тогда

$$EX = c \cdot 0{,}97 + (c - 40\,000) \cdot 0{,}03 = c - 40\,000 \cdot 0{,}03 = c - 1200.$$

Из условия $c - 1200 = 300$ получаем $c = 1500$.

Ответ: 1500

---

45. Страховая компания предлагает страхование багажа на время поездки. При наступлении страхового случая клиент получает 60 000 руб. Вероятность страхового случая по одному договору равна 0,005. Компания хочет, чтобы математическое ожидание её дохода от одного договора составляло 450 руб. Какой должна быть цена полиса (в рублях)?

Решение. Пусть c — цена полиса. Доход компании X по одному договору равен c, если страхового случая не было (вероятность 0,995), и $c - 60\,000$, если он произошёл (вероятность 0,005). Тогда

$$EX = c \cdot 0{,}995 + (c - 60\,000) \cdot 0{,}005 = c - 60\,000 \cdot 0{,}005 = c - 300.$$

Из условия $c - 300 = 450$ получаем $c = 750$.

Ответ: 750

---

46. Компания оформляет страхование велосипедов от кражи. Полис стоит 1600 руб., при страховом случае выплачивается 50 000 руб. Вероятность страхового случая по отдельному полису равна 0,02. Найдите математическое ожидание дохода компании от продажи одного полиса. Ответ дайте в рублях.

Решение. Доход компании X по одному полису принимает значение 1600 с вероятностью 0,98 и значение $1600 - 50\,000 = -48\,400$ с вероятностью 0,02. Тогда

$$EX = 1600 \cdot 0{,}98 + (-48\,400) \cdot 0{,}02 = 1568 - 968 = 600.$$

Ответ: 600

---

47. Компания оформляет страхование квартир от затопления. Полис стоит 1500 руб., при страховом случае выплачивается 200 000 руб. Вероятность страхового случая по отдельному полису равна 0,004. Найдите математическое ожидание дохода компании от продажи одного полиса. Ответ дайте в рублях.

Решение. Доход компании X по одному полису принимает значение 1500 с вероятностью 0,996 и значение $1500 - 200\,000 = -198\,500$ с вероятностью 0,004. Тогда

$$EX = 1500 \cdot 0{,}996 + (-198\,500) \cdot 0{,}004 = 1494 - 794 = 700.$$

Ответ: 700

48. Компания оформляет страхование дачных домов от пожара: полис стоит 4000 руб., вероятность страхового случая по одному договору равна 0,005. Компания рассчитывает, что математическое ожидание её дохода от одного полиса будет не меньше 1500 руб. Какую наибольшую выплату (в рублях) можно установить при страховом случае?

Решение. Пусть W — выплата. Аналогично предыдущим задачам, $EX = 4000 - W \cdot 0{,}005$. Условие $4000 - 0{,}005W \geq 1500$ равносильно $W \leq \dfrac{2500}{0{,}005} = 500\,000$.

Ответ: 500 000

Тип 8. Покупки упаковками

Составляем закон распределения числа купленных единиц.

49. Батарейки продаются поштучно, а также блистерами по 4 и по 8 штук. Из каждых 100 посетителей отдела в среднем 65 ничего не покупают, 15 покупают одну батарейку, 12 берут блистер по 4 штуки, 8 берут блистер по 8 штук. Найдите математическое ожидание числа батареек, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Решение. Пусть X — число батареек, купленных одним человеком. Закон распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0{,}65 & 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

Проверка: сумма вероятностей равна 1. Тогда

$$EX = 0 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}12 + 8 \cdot 0{,}08 = 1{,}27.$$

Ответ: 1,27

50. Сырки в магазине продаются поштучно или коробками по 6 штук. Из каждых 100 покупателей магазина в среднем 71 сырки не берут, 22 берут один сырок, 7 берут коробку. Найдите математическое ожидание числа сырков, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Решение. Пусть X — число сырков, купленных одним человеком. Закон распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0{,}71 & 0{,}22 & 0{,}07 \end{pmatrix}.$$

Проверка: сумма вероятностей равна 1. Тогда

$$EX = 0 \cdot 0{,}71 + 1 \cdot 0{,}22 + 6 \cdot 0{,}07 = 0{,}64.$$

Ответ: 0,64

51. Тетради продаются поштучно и в пачках по 5 и по 12 штук. Из каждых 100 посетителей канцелярского магазина в среднем 62 тетради не покупают, 18 покупают одну тетрадь, 14 покупают пачку по 5, 6 покупают пачку по 12. Найдите математическое ожидание числа тетрадей, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Решение. Пусть X — число тетрадей, купленных одним человеком. Закон распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 12 \\ 0{,}62 & 0{,}18 & 0{,}14 & 0{,}06 \end{pmatrix}.$$

Проверка: сумма вероятностей равна 1. Тогда

$$EX = 0 \cdot 0{,}62 + 1 \cdot 0{,}18 + 5 \cdot 0{,}14 + 12 \cdot 0{,}06 = 1{,}6.$$

Ответ: 1,6

52. Мандарины на рынке продают поштучно, а также сетками по 10 и по 15 штук. Из каждых 100 подошедших к прилавку в среднем 65 уходят без покупки, 12 покупают один мандарин, 15 берут сетку по 10, 8 берут сетку по 15. Найдите математическое ожидание числа мандаринов, которое приобретает один случайно выбранный человек из этой группы.

Решение. Пусть X — число мандаринов, купленных одним человеком. Закон распределения:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 & 15 \\ 0{,}65 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$$

Проверка: сумма вероятностей равна 1. Тогда

$$EX = 0 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}12 + 10 \cdot 0{,}15 + 15 \cdot 0{,}08 = 2{,}82.$$

Ответ: 2,82

Тип 9. Свойства EX и DX

$E(aX+b) = a\,EX + b, \quad D(aX+b) = a^2\,DX.$

53. Известно, что $EX = 2{,}4$. Найдите $E(5X - 7)$.

Решение. По свойствам математического ожидания $E(aX+b) = a\,EX + b$. Поэтому $E(5X-7) = 5 \cdot 2{,}4 - 7 = 12 - 7 = 5$.

Ответ: 5

54. Дисперсия случайной величины X равна 1,5. Найдите дисперсию случайной величины $Y = 3 - 4X$.

Решение. Прибавление константы не меняет дисперсию, а при умножении на число a дисперсия умножается на a^2: $D(aX+b) = a^2\,DX$. Значит, $DY = (-4)^2 \cdot 1{,}5 = 16 \cdot 1{,}5 = 24$.

Ответ: 24

55. Случайная величина X задана законом распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Найдите дисперсию случайной величины $Y = 2X + 9$.

Решение. Сначала найдём DX: $EX = (-1)\cdot 0{,}3 + 2\cdot 0{,}7 = 1{,}1$, $E\left(X^2\right) = (-1)^2\cdot 0{,}3 + 2^2\cdot 0{,}7 = 3{,}1$, $DX = 3{,}1 - 1{,}1^2 = 1{,}89$. Так как $D(aX+b) = a^2 DX$, получаем $DY = 4\cdot 1{,}89 = 7{,}56$.

Ответ: 7,56

---

56. Случайная величина X задана законом распределения

Значение X	0	1	3
Вероятность	0,2	0,5	0,3

Случайная величина Y связана с X равенством $Y = 10 - 3X$. Найдите EY.

Решение. $EX = 0\cdot 0{,}2 + 1\cdot 0{,}5 + 3\cdot 0{,}3 = 1{,}4$. По свойству $E(aX+b) = a\,EX + b$ получаем $EY = 10 - 3\cdot 1{,}4 = 5{,}8$.

Ответ: 5,8

Тип 10. Биномиальное распределение

$EX = np$, $DX = npq$, $P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

57. Симметричную монету бросают 100 раз. Случайная величина X — число выпадений орла. Найдите дисперсию DX.

Решение. Броски независимы, и в каждом орёл выпадает с вероятностью $p = 0{,}5$. Значит, X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}5$, $q = 1 - p = 0{,}5$. Поэтому $DX = npq = 100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 25$.

Ответ: 25

---

58. Игральную кость бросают 72 раза. Случайная величина X — число выпадений шестёрки. Найдите DX.

Решение. В каждом броске шестёрка выпадает с вероятностью $p = \dfrac{1}{6}$, броски независимы, поэтому X распределена по биномиальному закону с $n = 72$. Тогда $DX = npq = 72\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{5}{6} = 10$.

Ответ: 10

---

59. Стрелок делает 25 независимых выстрелов, вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2. Найдите стандартное отклонение числа попаданий.

Решение. Число попаданий X имеет биномиальное распределение с $n = 25$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$. $DX = npq = 25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 4$, откуда $\sigma = \sqrt{DX} = 2$.

Ответ: 2

---

60. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, причём $EX = 12$, $DX = 4{,}8$. Найдите число испытаний n.

Решение. Для биномиального распределения $EX = np$, $DX = npq$. Разделив, получаем $q = \dfrac{DX}{EX} = \dfrac{4{,}8}{12} = 0{,}4$, откуда $p = 0{,}6$ и $n = \dfrac{EX}{p} = \dfrac{12}{0{,}6} = 20$.

Ответ: 20

---

61. Вероятность того, что зашедший в магазин посетитель сделает покупку, равна 0,5. Зашли 4 посетителя, их решения независимы. Случайная величина X — число сделавших покупку. Найдите $P(X = 2)$.

Решение. X распределена по биномиальному закону с $n = 4$, $p = q = 0{,}5$. По формуле Бернулли

$$P(X = 2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot 0{,}5^4 = \frac{6}{16} = 0{,}375.$$

Ответ: 0,375

---

62. Случайная величина X имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 10$ и $p = 0{,}5$. Найдите $E\left(X^2\right)$.

Решение. Из формулы $DX = E\left(X^2\right) - (EX)^2$ следует $E\left(X^2\right) = DX + (EX)^2$. Здесь $EX = np = 5$, $DX = npq = 10 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5$. Значит, $E\left(X^2\right) = 2{,}5 + 25 = 27{,}5$.

Ответ: 27,5

Тип 11. Геометрическое распределение

$P(X = k) = q^{k-1}p$, $\quad EX = \frac{1}{p}$, $\quad DX = \frac{q}{p^2}$.

63. Баскетболист бросает мяч в кольцо до первого попадания. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,8, броски независимы. Найдите математическое ожидание числа бросков.

Решение. Число бросков X до первого попадания (включая удачный) имеет геометрическое распределение: $P(X = k) = q^{k-1}p$, $p = 0{,}8$. Для него $EX = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{0{,}8} = 1{,}25$.

Ответ: 1,25

---

64. Независимые испытания проводят до первого успеха. Математическое ожидание числа проведённых испытаний равно 4. Найдите вероятность успеха в одном испытании.

Решение. Число испытаний до первого успеха имеет геометрическое распределение, и $EX = \dfrac{1}{p}$. Из $\dfrac{1}{p} = 4$ получаем $p = 0{,}25$.

Ответ: 0,25

---

65. Симметричную монету бросают до первого выпадения орла. Найдите дисперсию числа бросков.

Решение. Число бросков имеет геометрическое распределение с $p = q = 0{,}5$. Поэтому $DX = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{0{,}5}{0{,}25} = 2$.

Ответ: 2

---

66. Случайная величина X — число независимых испытаний до первого успеха (включительно), $EX = 3$. Найдите DX.

Решение. Из $EX = \dfrac{1}{p} = 3$ находим $p = \dfrac{1}{3}$, $q = \dfrac{2}{3}$. Тогда $DX = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{2}{3} \cdot 9 = 6$.

Ответ: 6

---

67. Автомат выдаёт приз с вероятностью 0,3 независимо от предыдущих попыток. Игрок пытается до первого приза. Найдите вероятность того, что понадобится ровно 3 попытки.

Решение. Нужно, чтобы первые две попытки были неудачными, а третья — удачной: $P(X = 3) = q^2 p = 0{,}7^2 \cdot 0{,}3 = 0{,}147$.

Ответ: 0,147

---

68. Вероятность успешной отправки сообщения с одной попытки равна 0,2. Попытки повторяют до первого успеха, они независимы. Найдите вероятность того, что понадобится больше трёх попыток.

Решение. Событие $X > 3$ означает, что первые три попытки неудачны: $P(X > 3) = q^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$.

Ответ: 0,512

Тип 12. Суммы случайных величин

$E(aX + bY) = aEX + bEY$; для независимых $D(aX + bY) = a^2 DX + b^2 DY$.

69. Известно, что $EX = 3$ и $EY = -2$. Найдите $E(2X - 3Y + 1)$.

Решение. Математическое ожидание линейно (независимость здесь не нужна): $E(2X - 3Y + 1) = 2EX - 3EY + 1 = 6 + 6 + 1 = 13$.

Ответ: 13

---

70. Случайные величины X и Y независимы, $DX = 1{,}5$, $DY = 2$. Найдите $D(2X - Y)$.

Решение. Для независимых величин $D(aX + bY) = a^2DX + b^2DY$. Поэтому $D(2X - Y) = 4 \cdot 1{,}5 + (-1)^2 \cdot 2 = 8$. Обратите внимание: дисперсии складываются и при вычитании величин.

Ответ: 8

71. Независимые случайные величины X и Y имеют стандартные отклонения 3 и 4 соответственно. Найдите стандартное отклонение величины $X + Y$.

Решение. $D(X + Y) = DX + DY = 3^2 + 4^2 = 25$, значит, $\sigma(X + Y) = \sqrt{25} = 5$. Складываются дисперсии, а не стандартные отклонения.

Ответ: 5

72. Независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Найдите $D(X + Y)$.

Решение. $EX = 1, E\left(X^2\right) = 2, DX = 2 - 1 = 1$. $EY = -0{,}2 + 0{,}8 = 0{,}6, E\left(Y^2\right) = 1, DY = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$. Так как величины независимы, $D(X + Y) = DX + DY = 1{,}64$.

Ответ: 1,64

73. Время дороги ученика до школы (в минутах) в разные дни — независимые одинаково распределённые случайные величины с дисперсией 2. Найдите дисперсию суммарного времени дороги за 5 дней.

Решение. Суммарное время $S = X_1 + \cdots + X_5$, слагаемые независимы, поэтому $DS = DX_1 + \cdots + DX_5 = 5 \cdot 2 = 10$. Не путайте с $D(5X) = 25DX = 50$: величина $5X$ соответствует одинаковому времени во все пять дней.

Ответ: 10

Тип 13. Функция распределения

Здесь $F(x) = P(X < x)$ (в некоторых источниках используют $F(x) = P(X \le x)$). Скачок функции распределения равен вероятности значения; для непрерывной величины $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

74. Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 3, \\ 0{,}8, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найдите $P(X = 3)$.

Решение. Функция распределения дискретной величины ступенчатая: она делает скачки в точках, которые являются значениями X, и величина скачка равна вероятности этого значения. Значения: 1, 3, 4 с вероятностями 0,3, $0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$ и $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Значит, $P(X = 3) = 0{,}5$.

Ответ: 0,5

---

75. Функция распределения $F(x) = P(X < x)$ дискретной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ 0{,}2, & -1 < x \le 0, \\ 0{,}7, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите EX.

Решение. По скачкам функции распределения восстанавливаем закон: X принимает значения -1, 0, 2 с вероятностями 0,2, 0,5, 0,3. Тогда $EX = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}4$.

Ответ: 0,4

---

76. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Найдите $P(1 < X < 2)$.

Решение. Для непрерывной величины $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$. Получаем $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = 1 - \dfrac{1}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75

---

77. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

Найдите $P(X > 3)$.

Решение. $P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - F(3) = 1 - \dfrac{9}{25} = 0{,}64$ (для непрерывной величины $P(X = 3) = 0$).

Ответ: 0,64

---

78. Непрерывная случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{4}, & 1<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Найдите число m, для которого $P(X<m)=0{,}3$.

Решение. $P(X<m)=F(m)$. Значение 0,3 функция принимает на участке $1<x\le 5$: $\dfrac{m-1}{4}=0{,}3$, откуда $m=2{,}2$.

Ответ: 2,2

Тип 14. Равномерное распределение

$EX=\frac{a+b}{2}$, $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$, вероятность пропорциональна длине.

79. Автобусы ходят строго с интервалом 20 минут. Пассажир приходит на остановку в случайный момент, и время его ожидания распределено равномерно на отрезке $[0;20]$ (в минутах). Найдите вероятность того, что ждать придётся меньше 5 минут.

Решение. Для равномерного распределения на $[a;b]$ вероятность попасть в промежуток внутри отрезка равна отношению длин: $P(T<5)=\dfrac{5-0}{20-0}=0{,}25$.

Ответ: 0,25

---

80. Случайная величина T распределена равномерно на отрезке $[0;12]$. Найдите DT.

Решение. Для равномерного распределения на $[a;b]$ дисперсия равна $\dfrac{(b-a)^2}{12}$. Здесь $DT=\dfrac{12^2}{12}=12$.

Ответ: 12

---

81. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[2;8]$. Найдите $E\left(X^2\right)$.

Решение. $EX=\dfrac{2+8}{2}=5$, $DX=\dfrac{(8-2)^2}{12}=3$. Так как $DX=E\left(X^2\right)-(EX)^2$, получаем $E\left(X^2\right)=DX+(EX)^2=3+25=28$.

Ответ: 28

---

82. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-3;7]$. Найдите $P\left(|X|<2\right)$.

Решение. Условие $|X|<2$ означает $-2<X<2$. Этот интервал целиком лежит в $[-3;7]$, его длина 4, длина всего отрезка 10. Поэтому $P=\dfrac{4}{10}=0{,}4$.

Ответ: 0,4

83. Случайная величина распределена равномерно на отрезке $[0; L]$, её дисперсия равна 3. Найдите L.

Решение. $D = \dfrac{L^2}{12} = 3$, откуда $L^2 = 36$ и $L = 6$ (длина положительна).

Ответ: 6

Тип 15. Показательное распределение

$P(T > t) = e^{-\lambda t}$, $ET = \frac{1}{\lambda}$, $DT = \frac{1}{\lambda^2}$.

84. Время безотказной работы прибора (в часах) имеет показательное распределение, среднее время безотказной работы равно 800 ч. Найдите параметр λ этого распределения.

Решение. Для показательного распределения $ET = \dfrac{1}{\lambda}$. Значит, $\lambda = \dfrac{1}{800} = 0{,}00125$.

Ответ: 0,00125

85. Время обслуживания одного клиента (в минутах) распределено по показательному закону, среднее время обслуживания равно 5 мин. Найдите дисперсию времени обслуживания.

Решение. $ET = \dfrac{1}{\lambda} = 5$, поэтому $\lambda = 0{,}2$ и $DT = \dfrac{1}{\lambda^2} = 25$.

Ответ: 25

86. Срок службы детали T (в сутках) имеет показательное распределение, причём $P(T > 100) = 0{,}9$. Найдите $P(T > 300)$.

Решение. Для показательного распределения $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Тогда $P(T > 300) = e^{-300\lambda} = \left(e^{-100\lambda}\right)^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729$.

Ответ: 0,729

87. Время ожидания звонка T (в минутах) имеет показательное распределение, $P(T > 10) = 0{,}8$. Найдите $P(10 < T \le 20)$.

Решение. $P(T > 20) = e^{-20\lambda} = \left(e^{-10\lambda}\right)^2 = 0{,}64$. Поэтому $P(10 < T \le 20) = P(T > 10) - P(T > 20) = 0{,}8 - 0{,}64 = 0{,}16$.

Ответ: 0,16

88. Время до распада радиоактивного ядра имеет показательное распределение. Вероятность того, что ядро не распадётся за 30 лет, равна 0,5. Найдите вероятность того, что оно не распадётся за 90 лет.

Решение. $P(T > 90) = e^{-90\lambda} = \left(e^{-30\lambda}\right)^3 = 0{,}5^3 = 0{,}125$.

Ответ: 0,125

Тип 16. Нормальное распределение

Плотность симметрична относительно $\mu = EX$; $P(X < \mu) = 0{,}5$.

89. Рост взрослого мужчины X (в сантиметрах) распределён нормально со средним 170 см и стандартным отклонением 6 см. Известно, что $P(X < 164) = 0{,}16$. Найдите $P(164 < X < 176)$.

Решение. График плотности нормального распределения симметричен относительно $EX = 170$, а точки 164 и 176 симметричны относительно 170. Поэтому $P(X > 176) = P(X < 164) = 0{,}16$ и $P(164 < X < 176) = 1 - 0{,}16 - 0{,}16 = 0{,}68$.

Ответ: 0,68

90. Масса пакета с крупой X (в граммах) распределена нормально, $EX = 1000$. Известно, что $P(X > 1010) = 0{,}1$. Найдите $P(990 < X < 1000)$.

Решение. По симметрии $P(X < 990) = P(X > 1010) = 0{,}1$. Кроме того, $P(X < 1000) = 0{,}5$. Значит, $P(990 < X < 1000) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$.

Ответ: 0,4

91. Случайная величина X распределена нормально, $EX = 20$, причём $P(X < 14) = 0{,}02$. Найдите $P(X < 26)$.

Решение. Точки 14 и 26 симметричны относительно 20, поэтому $P(X > 26) = P(X < 14) = 0{,}02$. Тогда $P(X < 26) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.

Ответ: 0,98

92. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием 2 и стандартным отклонением 1,5. Найдите дисперсию величины $Y = 3X - 5$.

Решение. $DX = 1{,}5^2 = 2{,}25$. По свойству дисперсии $DY = D(3X - 5) = 9\,DX = 20{,}25$.

Ответ: 20,25

93. Длина детали (в миллиметрах) распределена нормально, её математическое ожидание равно 40. Практически все детали (по правилу трёх сигм) имеют длину от 39,1 до 40,9 мм, т. е. этот промежуток — это $(\mu - 3\sigma;\ \mu + 3\sigma)$. Найдите стандартное отклонение σ.

Решение. $\mu + 3\sigma = 40{,}9$ при $\mu = 40$, откуда $3\sigma = 0{,}9$ и $\sigma = 0{,}3$.

Ответ: 0,3

Тип 17. Плотность распределения

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \quad P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx, \quad EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$

94. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = cx$ при $0 \le x \le 2$ и $f(x) = 0$ при остальных x. Найдите c.

Решение. Интеграл плотности по всей прямой равен 1: $\int_0^2 cx\,dx = c \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 2c = 1$, откуда $c = 0{,}5$.

Ответ: 0,5

---

95. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \frac{x}{2}$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите $P(X < 1)$.

Решение. $P(X < 1) = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0{,}25.$

Ответ: 0,25

---

96. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \frac{2x}{9}$ при $0 \le x \le 3$ и 0 при остальных x. Найдите EX.

Решение. $EX = \int_0^3 x \cdot \frac{2x}{9}\,dx = \frac{2}{9} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2}{9} \cdot 9 = 2.$

Ответ: 2

---

97. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = cx^2$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите c.

Решение. $\int_0^2 cx^2\,dx = c \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8c}{3} = 1$, откуда $c = \frac{3}{8} = 0{,}375$.

Ответ: 0,375

---

98. Плотность распределения случайной величины X равна $f(x) = \frac{3x^2}{8}$ при $0 \le x \le 2$ и 0 при остальных x. Найдите DX.

Решение. $EX = \int_0^2 \frac{3x^3}{8}\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{3}{8} \cdot 4 = 1{,}5$, $E\left(X^2\right) = \int_0^2 \frac{3x^4}{8}\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{32}{5} = 2{,}4$.
Тогда $DX = 2{,}4 - 1{,}5^2 = 0{,}15$.

Ответ: 0,15

Тип 18. Составление закона распределения

Перечисляем значения, находим их вероятности, затем EX или DX.

99. В коробке 5 ручек, из них 2 не пишут. Наугад берут 2 ручки. Случайная величина X — число неисправных ручек среди взятых. Найдите EX.

Решение. Всего способов выбрать две ручки $C_5^2 = 10$. $P(X=0) = \dfrac{C_3^2}{10} = 0{,}3$, $P(X=1) = \dfrac{2\cdot 3}{10} = 0{,}6$, $P(X=2) = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$. Тогда $EX = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}1 = 0{,}8$.

Ответ: 0,8

---

100. Из 6 лотерейных билетов 2 выигрышные. Наугад берут 3 билета. Случайная величина X — число выигрышных среди них. Найдите DX.

Решение. $C_6^3 = 20$. $P(X=0) = \dfrac{C_4^3}{20} = 0{,}2$, $P(X=1) = \dfrac{2\cdot C_4^2}{20} = 0{,}6$, $P(X=2) = \dfrac{C_4^1}{20} = 0{,}2$. $EX = 0{,}6 + 0{,}4 = 1$, $E\left(X^2\right) = 0{,}6 + 4\cdot 0{,}2 = 1{,}4$, $DX = 1{,}4 - 1 = 0{,}4$.

Ответ: 0,4

---

101. Из чисел $1, 2, 3, 4, 5$ случайным образом выбирают два различных. Случайная величина X — большее из выбранных чисел. Найдите EX.

Решение. Всего пар $C_5^2 = 10$. Если наибольшее число равно k, то второе можно выбрать $k-1$ способом, поэтому $P(X=k) = \dfrac{k-1}{10}$, $k = 2, 3, 4, 5$. $EX = \dfrac{2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 4\cdot 3 + 5\cdot 4}{10} = \dfrac{40}{10} = 4$.

Ответ: 4

---

102. Стрелок стреляет по мишени до первого попадания, но делает не более трёх выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,6. Случайная величина X — число сделанных выстрелов. Найдите EX.

Решение. $P(X=1) = 0{,}6$; $P(X=2) = 0{,}4\cdot 0{,}6 = 0{,}24$; $X = 3$, если первые два выстрела — промахи: $P(X=3) = 0{,}4^2 = 0{,}16$. $EX = 0{,}6 + 2\cdot 0{,}24 + 3\cdot 0{,}16 = 1{,}56$.

Ответ: 1,56

---

103. В урне 4 белых шара и 1 чёрный. Шары вынимают по одному без возвращения, пока не появится чёрный. Случайная величина X — число вынутых шаров (включая чёрный). Найдите DX.

Решение. Чёрный шар с равными шансами может оказаться на любом из 5 мест в случайном порядке, поэтому $P(X=k) = \dfrac{1}{5}$, $k = 1, \ldots, 5$. $EX = 3$, $E\left(X^2\right) = \dfrac{1+4+9+16+25}{5} = 11$, $DX = 11 - 9 = 2$.

Ответ: 2

Тип 19. Метод индикаторов

$EX = P(A_1) + \dots + P(A_n)$; для независимых событий $DX = \sum p_k q_k$.

104. Три стрелка независимо стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания равны 0,6, 0,7 и 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий.

Решение. Число попаданий $X = I_1 + I_2 + I_3$, где $I_k = 1$, если k-й стрелок попал, и 0 иначе. $EI_k = p_k$, поэтому $EX = 0{,}6 + 0{,}7 + 0{,}9 = 2{,}2$.

Ответ: 2,2

---

105. Три стрелка независимо стреляют по мишени по одному разу. Вероятности попадания равны 0,6, 0,7 и 0,9. Найдите дисперсию числа попаданий.

Решение. $X = I_1 + I_2 + I_3$, индикаторы независимы, $DI_k = p_k q_k$. Поэтому $DX = 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 = 0{,}24 + 0{,}21 + 0{,}09 = 0{,}54$.

Ответ: 0,54

---

106. В контрольной 4 задачи. Вероятности того, что Петя решит первую, вторую, третью и четвёртую задачу, равны 0,9; 0,8; 0,5 и 0,3. Найдите математическое ожидание числа решённых задач.

Решение. Число решённых задач — сумма индикаторов «решена k-я задача». По линейности $EX = 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}5 + 0{,}3 = 2{,}5$ (независимость для математического ожидания не требуется).

Ответ: 2,5

---

107. Пять писем случайным образом разложили по пяти подписанным конвертам, по одному в каждый. Найдите математическое ожидание числа писем, попавших в свои конверты.

Решение. Пусть $I_k = 1$, если k-е письмо попало в свой конверт. Каждое письмо с равными шансами оказывается в любом из 5 конвертов, поэтому $EI_k = \dfrac{1}{5}$. Число совпадений $X = I_1 + \dots + I_5$, и $EX = 5 \cdot \dfrac{1}{5} = 1$.

Ответ: 1

---

108. Симметричную монету бросают 10 раз. Найдите математическое ожидание числа пар соседних бросков с одинаковым результатом.

Решение. Соседних пар 9. Для каждой пары введём индикатор совпадения: вероятность совпадения результатов двух бросков равна 0,5. По линейности $EX = 9 \cdot 0{,}5 = 4{,}5$.

Ответ: 4,5

Тип 20. Среднее большого числа измерений

Для независимых одинаково распределённых $X_1, \dots, X_n$: $D(X_1 + \dots + X_n) = nDX$, $D\bar{X} = \frac{DX}{n}$, $\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

109. Стандартное отклонение результата одного измерения равно 0,6. Проведено 36 независимых измерений. Найдите стандартное отклонение среднего арифметического результатов.

Решение. Для среднего $\bar{X}$ из n независимых одинаково распределённых величин $D\bar{X} = \dfrac{DX}{n}$, поэтому $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0{,}6}{6} = 0{,}1$.

Ответ: 0,1

110. Дисперсия результата одного опыта равна 2,5. Проведено 50 независимых опытов. Найдите дисперсию среднего арифметического их результатов.

Решение. $D\bar{X} = \dfrac{DX}{n} = \dfrac{2{,}5}{50} = 0{,}05$.

Ответ: 0,05

111. Стандартное отклонение одного измерения равно 1,2. Какое наименьшее число независимых измерений нужно провести, чтобы стандартное отклонение их среднего арифметического было не больше 0,3?

Решение. $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{1{,}2}{\sqrt{n}} \le 0{,}3 \iff \sqrt{n} \ge 4 \iff n \ge 16$. Наименьшее $n = 16$.

Ответ: 16

112. Масса одного яблока — случайная величина со стандартным отклонением 20 г. В ящик кладут 100 яблок, их массы независимы. Найдите стандартное отклонение общей массы яблок в ящике (в граммах).

Решение. Для суммы независимых величин $DS = 100 \cdot 20^2 = 40\,000$, поэтому $\sigma(S) = \sqrt{40\,000} = 200$ г. Разброс общей массы растёт как $\sqrt{n}$, а не как n.

Ответ: 200

113. Симметричную монету бросают 400 раз. Найдите стандартное отклонение доли выпавших орлов (отношения числа орлов к числу бросков).

Решение. Число орлов X биномиальное: $DX = 400 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 100$. Доля равна $\dfrac{X}{400}$, её дисперсия $\dfrac{DX}{400^2} = \dfrac{100}{160\,000}$, а стандартное отклонение $\dfrac{\sqrt{100}}{400} = \dfrac{10}{400} = 0{,}025$. С ростом числа бросков доля всё теснее группируется около 0,5 — это проявление закона больших чисел.

Ответ: 0,025

Часть III. Ответы

1	4,3	24	2	47	700	70	8	93	0,3
2	3,95	25	3	48	500 000	71	5	94	0,5
3	6,5	26	2	49	1,27	72	1,64	95	0,25
4	−2,8	27	6	50	0,64	73	10	96	2
5	4,5	28	4	51	1,6	74	0,5	97	0,375
6	−0,75	29	1,45	52	2,82	75	0,4	98	0,15
7	1,8	30	5,1	53	5	76	0,75	99	0,8
8	7,15	31	3,8	54	24	77	0,64	100	0,4
9	0,69	32	0,3	55	7,56	78	2,2	101	4
10	6,24	33	0,1	56	5,8	79	0,25	102	1,56
11	2,29	34	0,4	57	25	80	12	103	2
12	5,76	35	0,45	58	10	81	28	104	2,2
13	7,36	36	0,2	59	2	82	0,4	105	0,54
14	5,01	37	0,6	60	20	83	6	106	2,5
15	6,21	38	0,5	61	0,375	84	0,00125	107	1
16	5,4	39	5	62	27,5	85	25	108	4,5
17	1,5	40	9	63	1,25	86	0,729	109	0,1
18	9,9375	41	−18	64	0,25	87	0,16	110	0,05
19	6	42	12,4	65	2	88	0,125	111	16
20	6,25	43	−12	66	6	89	0,68	112	200
21	1,25	44	1500	67	0,147	90	0,4	113	0,025
22	1,6	45	750	68	0,512	91	0,98		
23	3	46	600	69	13	92	20,25		