профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

Обществознание | Биология | Химия

Задачи с прикладным содержанием

Задание 17

Выпуск №2



тут можете держать с нами связь, получать бесплатные материалы, методички и разборы

Задачи с прикладным (физическим) содержанием

Задание 1

Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться закону

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где U — амплитуда напряжения на источнике тока (в вольтах), ω — частота переменного тока (в с^{-1}), L — индуктивность катушки (в генри), C — ёмкость конденсатора (в фарадах), R — сопротивление резистора (в омах). При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 180$ В, $L = 0{,}027$ Гн, $C = 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

Решение:

Так как по смыслу задачи $\omega > 0$, то, разделив числитель и знаменатель на ω, получим:

$$U_L(\omega) = \frac{UL}{\dfrac{1}{\omega}\cdot\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{UL}{\sqrt{\dfrac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \dfrac{1}{\omega^2 C}\right)^2}}.$$

Заметим, что выражение UL является положительной константой.

Важно отметить, что наибольшему значению функции $U_L(\omega)$ соответствует наименьшее значение выражения $\sqrt{\dfrac{R^2}{\omega^2} + \left(L - \dfrac{1}{\omega^2 C}\right)^2}$. При этом функция $f(t) = \sqrt{t}$ монотонно возрастающая, поэтому будем искать наименьшее значение подкоренного выражения.

Пусть $x = \dfrac{1}{\omega^2}$, тогда

$$y(x) = R^2 x + \left(L - \frac{x}{C}\right)^2, \text{ где } x > 0.$$

Получим, что $y = \dfrac{x^2}{C^2} - \left(\dfrac{2L}{C} - R^2\right)x + L^2$ — это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх.

Следовательно, её наименьшее значение будет достигаться в абсциссе её вершины, равной

$$x_{\text{в}} = \frac{\dfrac{2L}{C} - R^2}{2C^{-2}} = \frac{0{,}054\cdot 10^5 - 400}{2\cdot 10^{10}} = \frac{5000}{2\cdot 10^{10}} = \frac{25}{10^8}.$$

Тогда $\dfrac{1}{\omega^2} = \dfrac{25}{10^8}$, откуда $\omega = \dfrac{10^4}{5} = 2000$.

Ответ: 2000.

Задание 2

Распределение скорости молекулы водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

(распределение Максвелла). В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R — универсальная газовая постоянная, $M = 0{,}004$ кг/моль – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При каком значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 500$ К?

Решение:

Так как скорость движения молекулы может принимать только положительные значения, то $v > 0$.

Заметим, что выражение $4\pi \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}}$ является положительной константой и не влияет на характер монотонности функции.

Пусть $a = -\dfrac{M}{2RT}$ и $x = v^2$, тогда рассмотрим функцию:

$$y(x) = xe^{ax}, \text{ где } x > 0,\ a < 0.$$

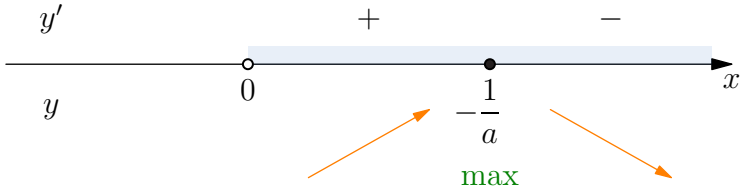
Найдём производную по формуле производной произведения:

$$y' = (x)'e^{ax} + x(e^{ax})' = e^{ax} + ax \cdot e^{ax} = e^{ax}(1 + ax).$$

Найдём нули производной:

$$\underbrace{e^{ax}}_{>0} \cdot (1 + ax) = 0, \quad 1 + ax = 0, \quad x = -\frac{1}{a} > 0.$$

Отметим на оси Ox нуль производной и определим промежутки убывания и возрастания функции:



$y'\left(-\dfrac{1}{2a}\right) = \dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} > 0$, $y'\left(-\dfrac{2}{a}\right) = -e^{-2} < 0$, поэтому производная меняет знак с «+» на «–» в точке $x = -\dfrac{1}{a}$. Значит, это точка максимума.

Следовательно, $x = v^2 = \dfrac{2RT}{M} = \dfrac{1000R}{0{,}004} = 250\,000R$, откуда $v = 500\sqrt{R}$.

Ответ: $500\sqrt{R}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1

Если к цепи, состоящей из конденсатора, резистора и катушки индуктивности, подключить источник переменного тока, то амплитуда напряжения на катушке (в вольтах) будет подчиняться закону

$$U_L(\omega) = \frac{UL\omega}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где U — амплитуда напряжения на источнике тока (в вольтах), ω — частота переменного тока (в с^{-1}), L — индуктивность катушки (в генри), C — ёмкость конденсатора (в фарадах), R — сопротивление резистора (в омах). При какой частоте ω амплитуда напряжения на катушке будет наибольшей, если $U = 200$ В, $L = 0{,}204$ Гн, $C = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф и $R = 20$ Ом?

Задание 2

Распределение скорости молекулы водорода при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{M}{2\pi RT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{Mv^2}{2RT}}$$

(распределение Максвелла). В этой формуле v – скорость молекулы в м/с, R — универсальная газовая постоянная, $M = 0{,}002$ кг/моль – молярная масса водорода, T – температура газа в кельвинах. При каком значении скорости v функция плотности принимает наибольшее значение, если $T = 600$ К?

Ответы

1. 500;
2. $200\sqrt{15R}$.