профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

Обществознание | Биология | Химия

Задачи с прикладным содержанием

Задание 17

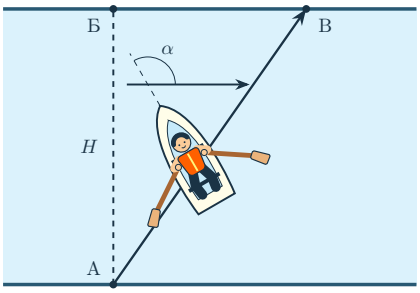
Выпуск №1



тут можете держать с нами связь, получать бесплатные материалы, методички и разборы

Задачи с прикладным (физическим) содержанием

Задание 1



На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u. При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v\cos\alpha}{v\sin\alpha},$$

где H — ширина реки, α — угол между вектором скорости лодки относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с и $v = 1$ м/с.

Решение:

Подставим в формулу известные числовые данные, тогда $L = 60 \cdot \dfrac{2 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Пусть $y(\alpha) = \dfrac{2 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$, найдём производную по формуле производной частного:

$$y' = \frac{(2+\cos\alpha)'\sin\alpha - (2+\cos\alpha)(\sin\alpha)'}{\sin^2\alpha} = \frac{-\sin\alpha\cdot\sin\alpha - (2+\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin^2\alpha} =$$

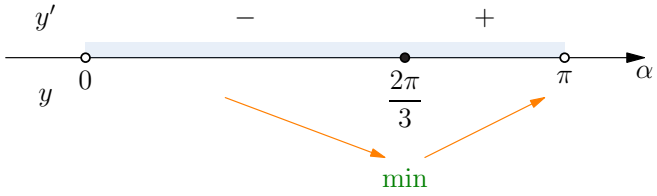
$$= \frac{-\sin^2\alpha - 2\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{-(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{-1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Найдём нули производной:

$$\frac{-1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0, \quad \begin{cases}\cos\alpha = -0{,}5,\\ \sin\alpha \neq 0;\end{cases} \qquad \alpha = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Так как по физическому смыслу задачи $\alpha \in (0;\pi)$, то на заданном интервале будет только один нуль производной – это $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$.

Отметим на оси $O\alpha$ нуль производной и определим промежутки убывания и возрастания функции:



$y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$, $y'\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = 4(\sqrt{3}-1) > 0$, поэтому производная меняет знак с «–» на «+» в точке $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$. Значит, это точка минимума, а наименьшее значение будет равно

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2 - 0{,}5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}, \text{ следовательно, } L = 60\sqrt{3}.$$

Ответ: $60\sqrt{3}$.

Задание 2

Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии $\mathcal{E}$, при котором функция плотности $f(\mathcal{E})$ принимает наибольшее значение, если $T = 100$ К.

Решение:

Так как кинетическая энергия молекулы может принимать только неотрицательные значения, то $\mathcal{E} \geqslant 0$.

Пусть $a = kT = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 100 = 1{,}38 \cdot 10^{-21}$, тогда исходная функция примет вид:

$$f(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}}.$$

Заметим, что выражение $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}$ является положительной константой и не влияет на характер монотонности функции $f(\mathcal{E})$. Пусть $y(\mathcal{E}) = \sqrt{\mathcal{E}} e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}}$.

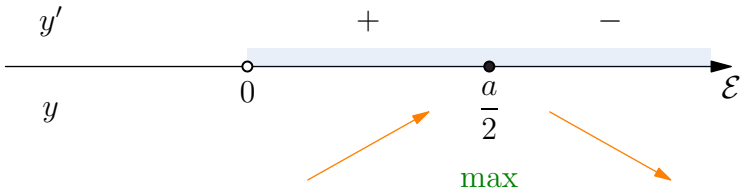
Найдём производную по формуле производной произведения:

$$y' = \left(\sqrt{\mathcal{E}}\right)' e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}} + \sqrt{\mathcal{E}} \cdot \left(e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\mathcal{E}}} \cdot e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}} + \sqrt{\mathcal{E}} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}} = e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}} \cdot \frac{a - 2\mathcal{E}}{2a\sqrt{\mathcal{E}}}, \text{ где } \mathcal{E} > 0.$$

Найдём нули производной:

$$\underbrace{e^{-\frac{\mathcal{E}}{a}}}_{>0} \cdot \frac{a - 2\mathcal{E}}{2a\sqrt{\mathcal{E}}} = 0, \quad a - 2\mathcal{E} = 0, \quad \mathcal{E} = \frac{a}{2}.$$

Отметим на оси $O\mathcal{E}$ нуль производной и определим промежутки убывания и возрастания функции:



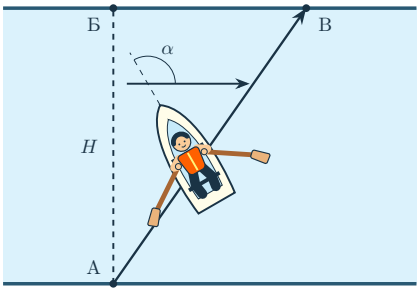
$y'\left(\frac{a}{4}\right) = e^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} > 0$, $y'(a) = -e^{-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} < 0$, поэтому производная меняет знак с «+» на «–» в точке $\mathcal{E} = \frac{a}{2}$. Значит, это точка максимума.

Следовательно, $\mathcal{E} = \frac{a}{2} = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-21}}{2} = 0{,}69 \cdot 10^{-21} = 6{,}9 \cdot 10^{-22}$.

Ответ: $6{,}9 \cdot 10^{-22}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задание 1



На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u. При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v\cos\alpha}{v\sin\alpha},$$

где H — ширина реки, α — угол между вектором скорости лодки относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 80$ м, $u = 1{,}5$ м/с и $v = 1{,}2$ м/с.

Задание 2

Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\mathcal{E}}\, e^{-\frac{\mathcal{E}}{kT}},$$

где $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана, $\mathcal{E}$ – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии $\mathcal{E}$, при котором функция плотности $f(\mathcal{E})$ принимает наибольшее значение, если $T = 400$ К.

Ответы

1. 60;
2. $2{,}76 \cdot 10^{-21}$.