

### Уравнения с модулем

1.  $|f(x)| = a$       а)  $|2|x-1|-5|=1$       б)  $||x-3|-2|-5|=3$

в)  $||x-1|-5|-2|=3$       г)  $||x+3|-2|-1|=4$

2.  $f(|x|) = 0$       а)  $x^2 - 3|x| - 2x - 6 = 0$       б)  $x^2 - 4|x| + 5x - 20 = 0$

3.  $f(|x|) = 0$  а)  $x^2 - 3|x| - 4 = 0$       б)  $x^2 - 5|x| + 6 = 0$       в)  $(x-7)^2 - |x-7| = 30$

4. а)  $x^2 - 4x + 4|x-2| - 1 = 0$       б)  $4x^2 + 4x - |2x+1| - 1 = 0$

5.  $|f(x)| = g(x)$       а)  $|x^2 - 3x - 2| = x + 2$       б)  $|x-3| = x^2 - 4x + 1$

в)  $|x-1| = 2x^2 - 4x + 1$       г)  $|2x^2 - 6x + 1| = x - 1$       д)  $|x-2| = 3x^2 - 2x - 2$

е)  $|x^2 - 4x + 2| = -x + 2$       ж)  $|x^2 - 2x - 5| = x + 5$       з)  $|x-2| = x^2 - 4x - 2$

и)  $|2x^2 - 5x - 1| = x^2 - 1$       к)  $\frac{1-2x}{3-|x-1|} = 1$       л)  $|x^2 - 2x - 1| = x - 1$

м)  $|x^3 + 4x^2 + x - 1| = x^3$

6. Уравнения, содержащие несколько модулей: а)  $2|x+2| - |x-1| = 2x+3$

б)  $2|x-3| + |x-1| = -x+5$       в)  $|x-2| - 2|x-4| = x-6$

г)  $|x-2| - 2|x-1| = -x$       д)  $|x-1| - 2|x-2| + 3|x-3| = 4$

е)  $|x-1| + 2|x+2| = 2x+5$       ж)  $|x^2 - 7x + 16| + |x^2 - 7x + 12| = 28$

7.  $|f(x)| = |g(x)|$       а)  $|2x^2 + 5x - 4| = |x^2 - 4|$       б)  $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$

в)  $|x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 4| = |x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 4|$

8.  $|f(x)| = f(x)$  и  $|f(x)| = -f(x)$       а)  $|-x^4 + 10x^2 - 9| = -x^4 + 10x^2 - 9$

б)  $\frac{2x-1}{x+4} = \frac{1-2x}{x+4}$       в)  $\frac{4x^2}{|x-4|} + x^2 = \frac{x^3}{x-4}$

### 9. Уравнения, содержащие внутренние модули

а)  $|3x-4+|x-2|| = x+2$       б)  $|x^2-3x+|x-2|| = 2x-5$

в)  $|4x-2-|3x+1|| = 2x-3$       г)  $|2x-7+|x-2|| = 2x-3$

д)  $|5x+2-|2x+1|| = 2x+5$       е)  $||3-x|-x+1|+x = 6$

10. а)  $|x-2| + |x^2-4x+3| = |x^2-3x+1|$

б)  $|x^2+3x-4| + |9-x^2| = |3x+5|$

11. а)  $|x-2| + |-x^2+4x-3| = -x^2+5x-5$

б)  $|x^2+3x-4| + |9-x^2| = 3x+5$

в)  $|x+1| + |x-1| + |x+2| + |x-2| + \dots + |x+100| + |x-100| = 200x$ , МГУ, хв

г)  $|8-2x-x^2| + |3x^2-2x-5| = 2x^2-4x+3$  МГУ

д)  $|x^2-4x+3| + |x^2-5x+6| = x-3$

е)  $|x^3+7x^2-11x-6| + |x^3-12x^2-5x+3| = 18x^2-2x-13$  МГУ, №6

12. Уравнения, решаемые с помощью геометрической интерпретации модуля. а)  $|x-2| + |x+1| = 3$       б)  $|x-4| - |x-3| = 1$

в)  $|x+2| - |x-3| = 5$       г)  $|x-1| + |2-x| = 1$

13. а)  $(2x-3)^2 \cdot (5x+1)^2 + \sqrt{x^2-2x+1} = 1-x$

б)  $(2x+1)^2 \cdot (x+3)^2 + \sqrt{(x+1)^2} = x+1$

в)  $(|x-1|-2)^2 + (x^2+5x+4)^2 = 0$       г)  $\begin{cases} |x-1| + |y-2| = 1 \\ y = 3 - |x-1| \end{cases}$

14.  $25 \cdot 3^{|x-3|+|x-5|} + 9 \cdot 5^{|x-4|+|x-6|} = 450$

### Неравенства с модулем

1. Неравенства, содержащие несколько модулей а)  $|x-1|+|2-x|>x+3$

б)  $2|x+2|-|x-3|\geq x+2$  в)  $2|x+1|-|x-3|\leq x+3$

г)  $2|x|-3|x-1|-|x+2|\leq x-4$  д)  $2|x|-3|x+1|-|x-2|\geq x-1$

е)  $|x-3|\leq 2x+(3+x)\cdot|1-2x|$  ж)  $\frac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2|\leq 0$

з)  $\frac{x^2-3|x-1|-2}{x^2-2|x|}\leq 1$  и)  $\frac{6x-|x^2-x-6|}{|1-x|}\leq 5x+3$  к)  $\frac{2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\leq 0$

л)  $(|x+2|-4)\cdot(|2x-1|-3)\leq 0$  м)  $\frac{|x^2-x-12|-3x+4}{x^2+x}\leq 2$

2.  $|f(x)|\leq g(x)$  а)  $|x^2+4x+3|\leq x+1$  б)  $|4x^2+3x|\leq 3x^2-2x$

в)  $|x^4-x^3-4x^2+x|\leq x^4+x^3-4x^2-x$

г)  $|x^8-4x^6+x^2+2x-3|\leq x^8-4x^6-x^2-2x+3$

д)  $\left|\frac{2x-5}{x^2+2x-3}\right|\leq \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$  е)  $\left|3-\frac{2x+1}{x-4}\right|\leq 2$

3.  $|f(x)|\geq g(x)$  а)  $3|x-1|+x^2\geq 7$  б)  $|2x^2-5x-2|\geq x^2-5x+2$

в)  $|x^2-4x|+3\geq x^2+|x-5|$  г)  $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>3$  д)  $\left|\frac{2}{x-1}\right|\geq \frac{3}{x+2}$

е)  $\left|\frac{3x-1}{x^2+x-2}\right|\geq \frac{3x}{x^2+2x-3}$

4. а)  $\frac{16|x+1|-10}{3|x+1|-1}<3$  б)  $\frac{3|x-2|-4}{2|x-2|-5}\geq 2$  в)  $\frac{3|x-1|-5}{2|x-1|-1}\geq 1$

г)  $\frac{2|x-3|-6}{|x-3|-2}\geq 1$  д)  $x^2-2x\leq|x-1|-1$  е)  $x^2-8x-\frac{3}{|x-4|}+18\leq 0$

ж)  $2-|2x+1|+\frac{2}{3-|2x+1|}\leq \frac{8}{3+|2x+1|}$

5. а)  $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}\leq 0$  б)  $\frac{x^2-2|x-1|-2x-3}{x+1}\geq 1$  в)  $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}$

г)  $\frac{|x-1|}{x^2-3x+2}\geq 2$  д)  $2x>\frac{5x+3}{|x+2|}$  е)  $\frac{|x-1|-1}{x^2-2x}\leq 2$

ж)  $\frac{x^2-4|x+1|-1}{x^2-3x}\leq 1$  з)  $\frac{|x-1|-6}{(x+4)\cdot(x-2)}\geq 0$  и)  $\frac{|x-3|-1}{(x+2)\cdot(x+5)}\leq 0$

6.  $|f(x)|\geq|g(x)|$  а)  $|x-6|\geq|x^2-5x+9|$

б)  $|x^4-3x^3+4x^2+7x+3|\geq|x^4+3x^3-4x^2-7x+3|$

7. а)  $||x^2-3x-2|-1|\geq x^2+3x-1$  б)  $||2x^2-x|-3|\leq 2x^2+x+5$

в)  $||x^3-x-1|-5|\geq x^3+x+8$

8. а)  $\frac{|x+5|-|x+3|}{|x+4|-|x|}\leq 0$  б)  $\frac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\frac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$  МГУ,

в)  $\frac{|x^3+x-1|-|x^3-x+1|}{|x-1|-|x+1|}\geq 0$  г)  $\frac{(|x^2-8x+16|-|x-4|)\cdot(|x+6|-|x-2|)}{(|x^2-1|-8)\cdot(|x^2-6|x+5|)}$

9. а)  $|x^2+x-2|+|x+4|\leq x^2+2x+6$  МГУ, факультеты биол и фунд

б)  $|x^3-7x+6|+|x^3-3x+2|\leq 4(1-x)$  в)  $|2-x|+|x^2-2|\geq|x^2-x$

10.  $2x^4+x^2-4x-3x^2\cdot|x-2|+4\geq 0$  (олимп МФТИ)

11. а)  $\frac{(x^2+x+1)^2-2|x^3+x^2+x|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geq 0$  МГУ, ММ

б)  $\frac{5x-7}{|x^3-7x-1|-|x^3+7x+1|}\geq 0$  в)  $\left|\frac{x^2+3x}{x+1}\right|\leq|x+2|-\left|\frac{2}{x+1}\right|$

г)  $\left|\frac{x^2-x+1}{x-1}\right|<|x|+\frac{1}{|x-1|}$  д)  $\frac{7}{|x-1|-3}\geq|x+2|$

е)  $\frac{x^3-64}{|x-4|}-x\cdot|x-4|\geq 0$

ж)  $|x-3|+|x-2|+|x-1|+|x|+|x+1|+|x+2|+|x+3|<x^2-9$

Тригонометрия + модули

1. а)  $6 \sin^2 x - \frac{|\cos x|}{\cos x} \cdot \sin x - 2 = 0$

б)  $\cos x + \cos 3x = |\sin 2x|$

в)  $|\sin x| = \cos 2x - 1$

г)  $\sin x - \sin 3x = |\cos 2x|$

д)  $\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2} \left( \cos x - \frac{1}{2} \right)$

е)  $\sqrt{2} \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - \sin x = |\cos x|$

2.  $\sqrt{2}(\cos 8x + 2 \cos^2 2x) \sqrt{1 + \cos 4x} + \cos 10x + \cos 6x + 4 \cos^3 2x = 0$

3.  $\sqrt{1 + \cos 2x} + (1 + \sqrt{2}) \cos x = 4 \sin x + \cos x$

4. а)  $\frac{\sin 3x}{|\sin x|} + \frac{3 \sin x}{\sin 3x} = -2$  МФТИ б)  $\frac{2 \sin 3x + \sin 5x}{|\sin x|} = 1$  (Олимп УрГУ)

5.  $|1 + 2 \cos x + \cos 2x| = \sin x + 2 \sin 2x + \sin 3x$

6. МГУ, ВМК,  $\sqrt{1 - \sin 2x} + |\sin x| \leq \cos x$

7. Олимпиада УПИ  $\sin^2 x - \cos^2 3x = 2|\sin 3x| + |\sin x| - \frac{9}{4}$

8. МГУ  $|\sin 2x + \cos x| = \left| |\sin 2x| - |\cos x| \right|$  на  $(-2\pi; 2\pi)$

9. МГУ, мехмат  $|1 - 2 \sin x + \cos x| + 2 \sin x + 1 = \cos 2x$

10. а)  $(2^{2x} - (2^{-3} + 2^2) \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^{-3})^2 = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x} - 1$

б)  $\left( (\sin x + \sin^2 x)^2 - 6(\sin x + 1) \cdot \sin x \right)^2 = \frac{|2^{2x} - (2^7 + 2^6) \cdot 2^x + 2^{13}|}{(2^7 + 2^6) \cdot 2^x - 2^{2x} - 2^{13}} - 1$

11. (МГУ, Олимпиада «Ломоносов»)  $\sqrt{2} + \cos x + \left| \cos \frac{4x}{3} \right| \sin x = 0$

12. (МГУ, Олимпиада)  $\sin \left( x + \left| x + \frac{\pi}{6} \right| \right) + \frac{1}{2} \cos 2x = \cos^2 x$

13. (МФТИ)  $\sin 2x = 2 \sin^3 |x| + \sin 2x \cdot \cos x$ .

14. (МГУ)  $\left| \cos x + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} - \cos x \right)$

15. (МГУ, Олимпиада «Ломоносов») Найдите корни уравнения  $|\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 3x| + |\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x| = \operatorname{tg} 3x$ , принадлежащие  $(0; \pi]$

16. Решите уравнение  $3^{\left| x - \frac{1}{2} \right| + 2} = 7 + 2 \cos 6\pi x$

## Параметры + модули

1. Найдите наибольшее целое значение параметра  $a$ , при котором все решения неравенства  $\left| \left| 29x - 1 \right| + 121 \right| - 17 \left| + 8 \right| - 222 \leq 58a^2$  удовлетворяют условию  $x \in [-102; 117]$ .
2. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2(|x-2|+|x|)^2 - 3(a-2) \cdot (2-x+|x|) + a^2 - 3a = 0$  имеет ровно два корня.
3. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $(|x+3|+|x-a|)^2 - 6 \cdot (|x+3|+|x-a|) + 24a - 16a^2 = 0$  имеет ровно два различных корня.
4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $|2\sin^2 x + 8\cos x - 3a| = 2\sin^2 x + 7\cos x + 3a$  имеет на промежутке  $\left[ \frac{\pi}{2}; \pi \right)$  единственный корень.
5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2\cos^2 x + \left( 5a + \frac{1}{a+1} \right) \cdot |\sin x| = a^2 - 6a + 2$  имеет единственный корень на  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ .
6. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $|x+a^2| = |a+x^2|$  имеет ровно 3 корня.
7. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых среди решений уравнения  $5|x-1| - |x+2| = a - 5x$  имеется только одно отрицательное.
8. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$  имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу  $(4; 19)$ .

9. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых любое из отрезка  $[3; 5]$  является решением уравнения

$$|x - a - 6| + |x + a + 4| = 2a + 10.$$

10. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет хотя бы один корень на отрезке  $[5; 23]$ .

11. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $7|x+1| - 3x = |2x + |x-a||$  имеет не более одного корня.

12. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $9|x-1| = 4x - |3x - |x+a||$  имеет хотя бы одно решение.

13. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $\left| |3x - a| + 4a \right| + |3a - |x + 2a|| \leq 7x + 24$  выполняется для всех  $x$  из промежутка  $[0; 7]$

14. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых неравенство  $|3\sin x + a^2 - 22| + |7\sin x + a + 12| \leq 11\sin x + |a^2 + a - 20|$  выполняется для всех действительных  $x$ .

15. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a^2 + 7|x| + 49 \log_7(2x^2 + 7) = 7a + 3|2x - 7a|$  имеет хотя бы один корень