Метод масс (центров масс) при решении задач по геометрии

Задачи на №25_ОГЭ и №17_ЕГЭ

Учитель математики, ВКК, магистр педагогики НИУ ВШЭ, г. Москва
гимназия №39 «Французская гимназия»
Ведерникова Наталья Владимировна

Учитель математики Кошелева Валерия Вадимовна

1.

Понятие центра масс

Чтобы понять, что такое центр масс, рассмотрим детские качели (рис.1).

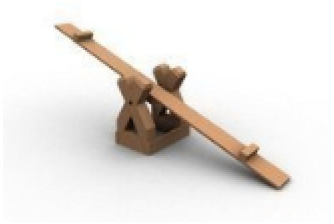
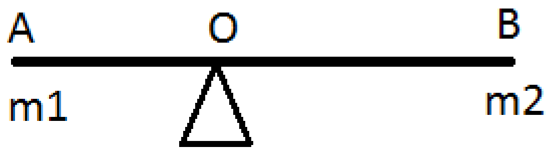


рис.1

Многие замечали, что более тяжелый ребёнок перевешивает.

Но стоит ему начать приближаться ближе к центру, как качели постепенно приходят в равновесие. Насколько ближе он должен подвинуться ответит метод масс. Переведём задачу на язык математики

Пусть качели – отрезок AB, где m1, m2 – массы, расположенные на концах качелей (m1 >m2).



Центром масс данной системы двух точек будет такая точка O данного отрезка AB, что AO·m1 = BO·m2, или = .

Чтобы найти центр масс системы из двух точек, надо всего лишь разбить отрезок в отношении, обратно пропорциональном массам точек.

<u>Пример:</u> Пусть масса, расположенная в точке A равна 400г, а масса в точке B равна 1400г (см. рис). Найти центр масс данного отрезка.

Решение: из определения центра масс получаем, что точка O делит отрезок AB в отношении = . Значит центр масс O делит отрезок так, что 7*AO = 2*BO.

Принцип центра масс является ничем иным, как законом рычага, с помощью которого Архимед собирался перевернуть Землю.

Родоначальником метода был великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в. до н. э. он обнаружил возможность доказывать новые математические факты с помощью свойств центра масс.

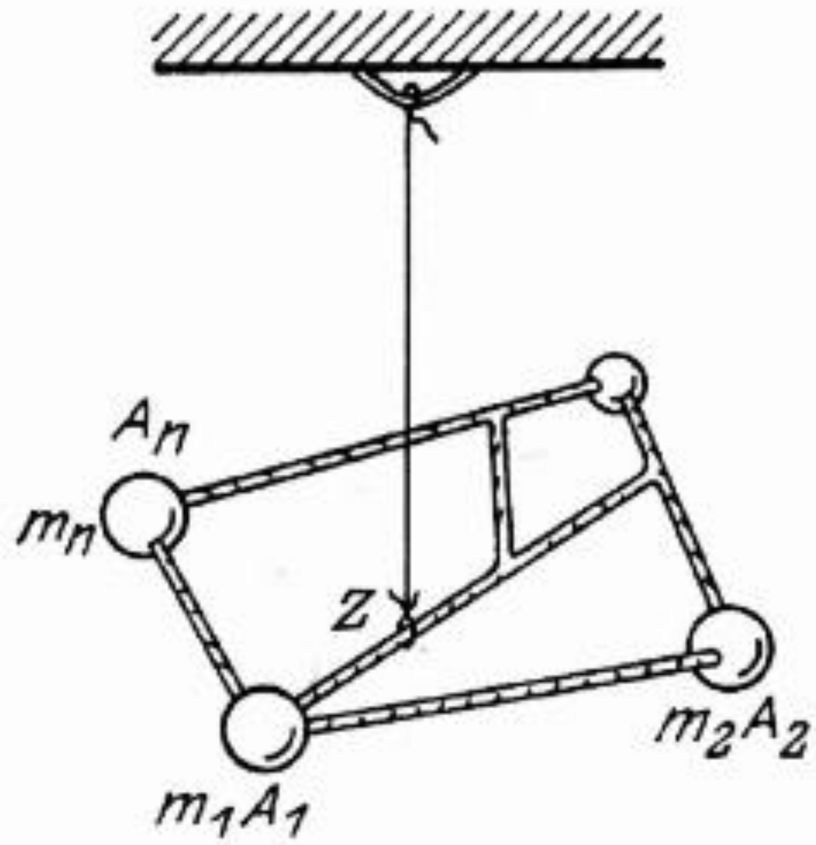


Рис. 1.

как угодно повернем систему вокруг точки Z, успокоим и отпустим, то она останется в равновесии. Такую точку Z называют *центром масс*, или *барицентром* системы материальных точек (1).

При применении этого понятия к решению геометрических задач используются следующие интуитивно ясные и имеющие простой механический смысл свойства центра масс.

1. Всякая система, состоящая из конечного числа материальных точек, имеет центр масс и притом единственный.

2. Центр масс двух материальных точек расположен на отрезке, соединяющем эти точки; его положение (рис. 2) определяется архимедовым правилом рычага (или, как его еще называют, «золотым правилом механики»): произведение массы материальной точки на расстояние от нее до центра масс одинаково для обеих точек, т. е. $m_1 d_1 = m_2 d_2$, где m_1, m_2 — массы материальных точек, а d_1, d_2 — соответствующие плечи, т. е. расстояния от материальных точек до центра масс.

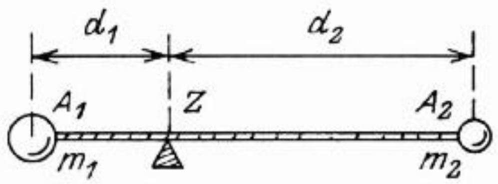


Рис. 2.

3. Если в системе, состоящей из конечного числа материальных точек, отметить несколько материальных точек и массы всех отмеченных точек перенести в их центр масс, то от этого положение центра масс **всей** системы не изменится.

Вот и вся теория. Как видите, речь идет об очень простых фактах из области механики. Разумеется, сформулированные свойства 1, 2, 3 должны быть обоснованы (и это будет аккуратно сделано в § 2). Но сейчас мы хотим проиллюстрировать то, что, несмотря на простоту этих фактов, они, тем не менее, представляют собой мощное средство доказательства теорем и решения геометрических задач.

2 Центр масс системы точек

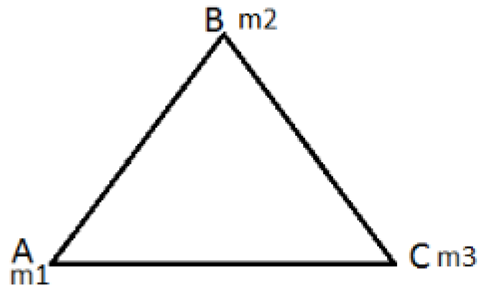
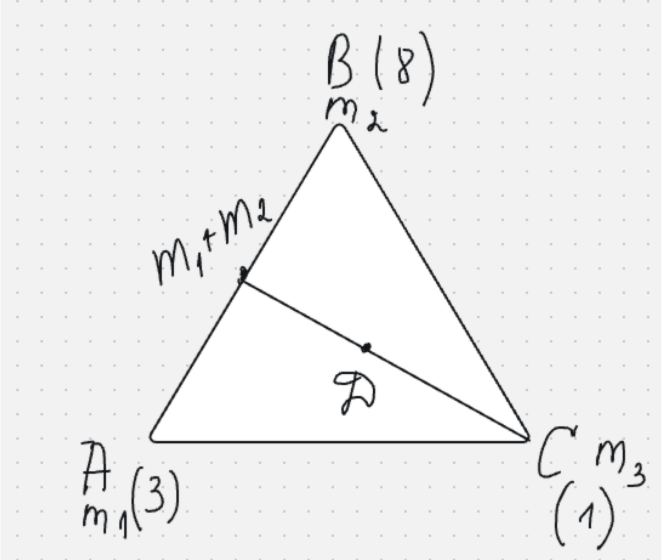


Рис.1

Теперь найдём центр масс треугольника. В точках A, B, C расположены массы m1, m2, m3 (см. рис 1).

Если нам дана система из нескольких точек с массой в каждой из них, то если любую пару точек заменить их центром масс, центр масс исходной системы не изменится.

Таким образом центр масс нашего треугольника (точка D) будет совпадать с центром масс точек O (центр масс для точек A и B) и C (рис.2).



Для решения этих задач методом центров масс мы будем использовать один и тот же алгоритм: подберем массы в вершинах так, чтобы точка D стала центром масс всей системы.

Масса точки $D = 3 + 8 + 1 = 12.$

Это теорема Архимеда о пересечении медиан, предложенное самим Архимедом

<u>Пример:</u> Дан треугольник ABC с массами mA = mB = mC = 1 в вершинах. Найти центр масс треугольника

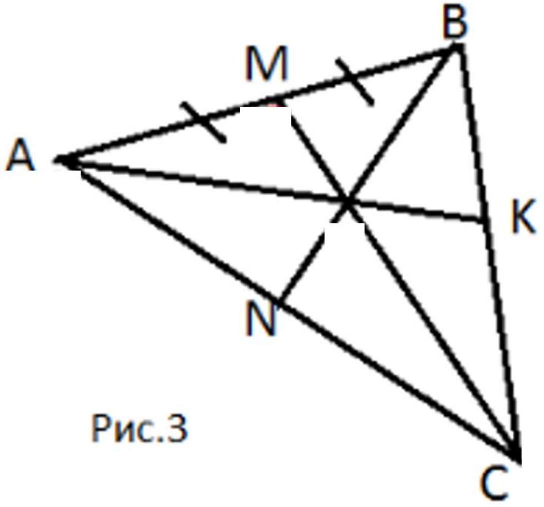


Рис.3

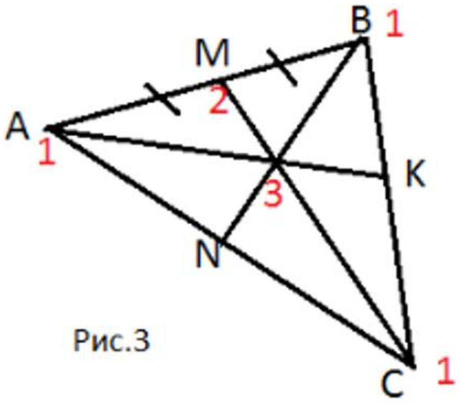


Рис.3

Пример 1. Докажем теорему Архимеда: *три медианы треугольника имеют общую точку, и каждая из медиан делится этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины.*

Решение (предложенное Архимедом). Пусть ABC (рис. 3) — данный треугольник; AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы. Загрузим

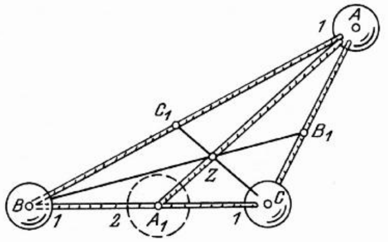


Рис. 3.

вершины A, B, C равными массами, — скажем, по 1 грамму. Получающаяся система трех материальных точек $1A$, $1B$, $1C$ имеет однозначно определенный центр масс Z (свойство 1). В силу свойства 3 положение центра масс не изменится, если массы материальных точек $1B$ и $1C$ мы перенесем в их центр масс, т. е. (согласно свойству 2) в точку A_1. Но тогда Z окажется центром масс лишь двух материальных точек $2A_1$ и $1A$. Значит, $Z \in [AA_1]$. Аналогично убедимся, что $Z \in [BB_1]$ и $Z \in [CC_1]$. Таким образом, все три медианы имеют общую точку Z. Кроме того, по правилу рычага (свойство 2) имеем $2|ZA_1| = 1|ZA|$, или $|ZA| : |ZA_1| = 2:1$.

Решение: Для начала найдём центр масс точек A и B. Это точка M, которая расположена в середине отрезка AB, т.к. на его концах одинаковые массы. В точке M сосредоточена масса 1+1=2.

Значит центр масс треугольника ABC совпадает с центром масс отрезка MC и делит отрезок в отношении 2:1 . Мы доказали, что в треугольнике с одинаковыми массами в вершинах его центр масс расположен на медиане и делит её в отношении 2:1. Аналогично можно найти центр масс на медианах BN и AK. Однако у треугольника только один центр масс, а значит мы все три раза попадали в одну точку. Так мы доказали, что медианы в треугольнике пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 .

Центр равных масс, помещенных в вершинах многоугольника (или многогранника), принято называть *центроидом* этого многоугольника (или многогранника). В частности, по теореме Архимеда точка пересечения медиан треугольника является его центроидом.

3 Задачи на применение центра масс

Задача 1: Дан треугольник ABC (рис.4). BM – медиана, а AN делит сторону BC в отношении 1:2 от вершины B и пересекается с BM в точке O. Найти отношение BO:OM.

Решение: Расположим в вершинах A и C массы, равные 1, а в вершину B – массу, равную 2. Тогда точка M – центр масс для точек A и C, и концентрирует массу, равную 2. Точка N – центр масс отрезка BC, т.к. BN:NC=1:2 (из условия), а mB:mC=2:1.

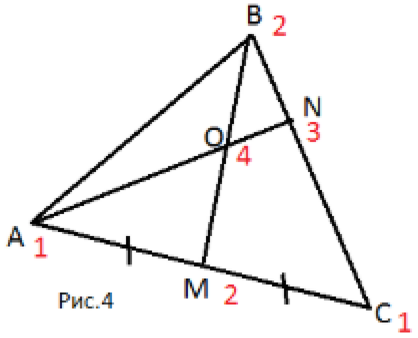


Рис.4

Предположим, что точка O – центр масс для отрезка BM. Тогда она является и центром масс для всего треугольника ABC и концентрирует в себе массу 2+2=4. Если O – центр масс треугольника, то здесь же и центр масс отрезка AN. Проверим это. В точке A сконцентрирована масса 1, в точке N – 3, а в точке O – 4.

1+3=4 , следовательно, O – центр масс отрезка AN и всего треугольника. Тогда отношение BO:OM = 2:2 = 1.

Ответ: BO = OM.

Работаем в парах (3-5 мин на задачу)

Рассказать друг-другу решение.

1. Тип «Отношение отрезков внутри треугольника» (ЕГЭ и ОГЭ)

Это прямые аналоги вашей задачи. Нужно найти, в каком отношении точка пересечения делит одну из чевиан.

- **Задача №1:** В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 4$ и $BK : KC = 3 : 2$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OK$.
- **Задача №2:** Прямая, проходящая через вершину C и середину стороны AB, пересекает чевиану AD, делящую BC в отношении $1 : 3$, в точке P. Найдите $AP : PD$.

ПРОВЕРКА у доски (2 мин)

Рассказать друг-другу решение.

Тип 1: Отношение отрезков

Эти задачи тренируют навык правильной «расстановки весов» при разных входных данных.

Задача №3 (Комбинированные отношения)
В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 5$. На стороне BC взята точка K так, что $BK : KC = 4 : 3$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O.

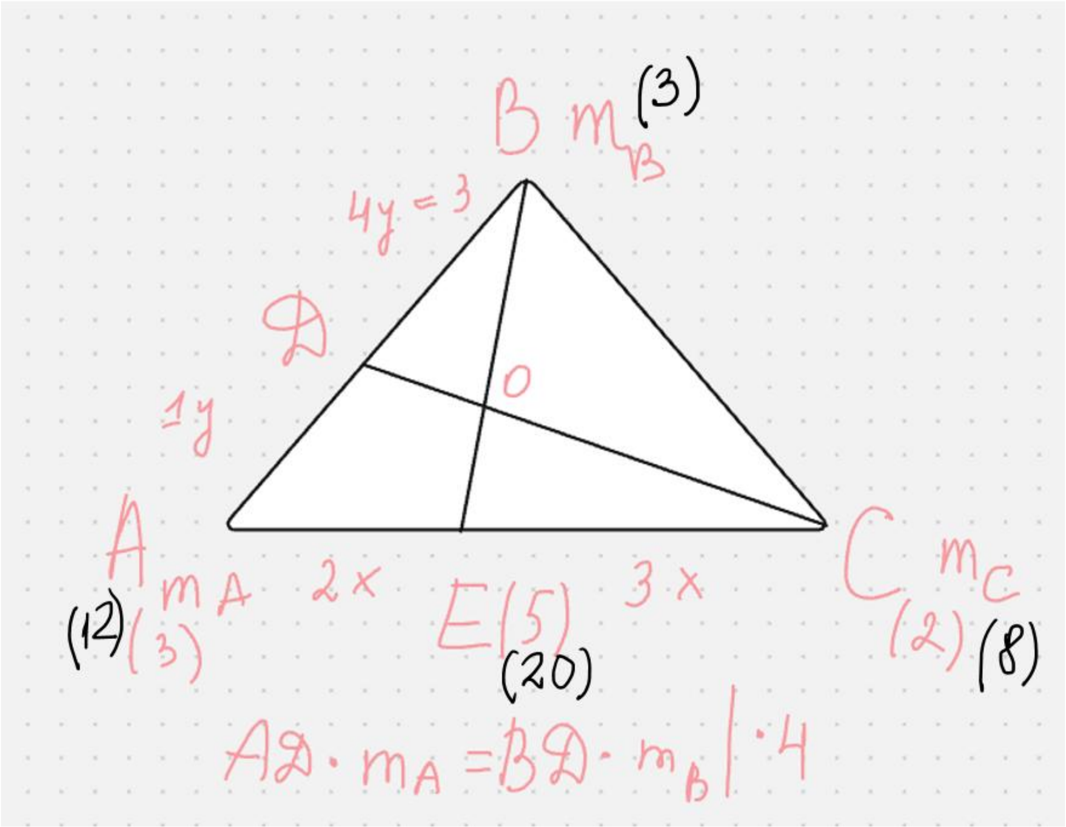
- **Вопрос:** Найдите, в каком отношении точка O делит чевиану AK.

Задача №4 (Медиана и чевиана)
В треугольнике ABC отрезок BM – медиана. Точка K на стороне BC делит её в отношении $BK : KC = 2 : 3$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке P.

- **Вопрос:** Найдите отношение $AP : PK$.

ЗАДАЧА №1_25_17_ОГЭ_ЕГЭ

Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что AE : EC = 2: 3, а на стороне AB взята точка D так, что AD : DB = 1: 4 . Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.



1. Расстановка масс

Чтобы точки E и D были центрами масс соответствующих сторон, массы в вершинах должны быть обратно пропорциональны длинам отрезков.

- **Сторона** AC: $AE : EC = 2 : 3$. Значит, $m(A) \cdot 2 = m(C) \cdot 3$.
  Возьмем $m(A) = 3$, тогда $m(C) = 2$.
- **Сторона** AB: $AD : DB = 1 : 4$. У нас уже есть $m(A) = 3$.
  По правилу рычага: $3 \cdot 1 = m(B) \cdot 4 \implies m(B) = 3/4 = 0.75$.

Чтобы избавиться от дробей, умножим все массы на 4:

- $m(A) = 12$
- $m(C) = 8$
- $m(B) = 3$

2. Поиск точки пересечения O

Пусть O — точка пересечения CD и BE. Она является центром масс всей системы $\{A, B, C\}$.

- Масса в точке E (на стороне AC): $m(E) = m(A) + m(C) = 12 + 8 = 20$.
- Масса в точке D (на стороне AB): $m(D) = m(A) + m(B) = 12 + 3 = 15$.

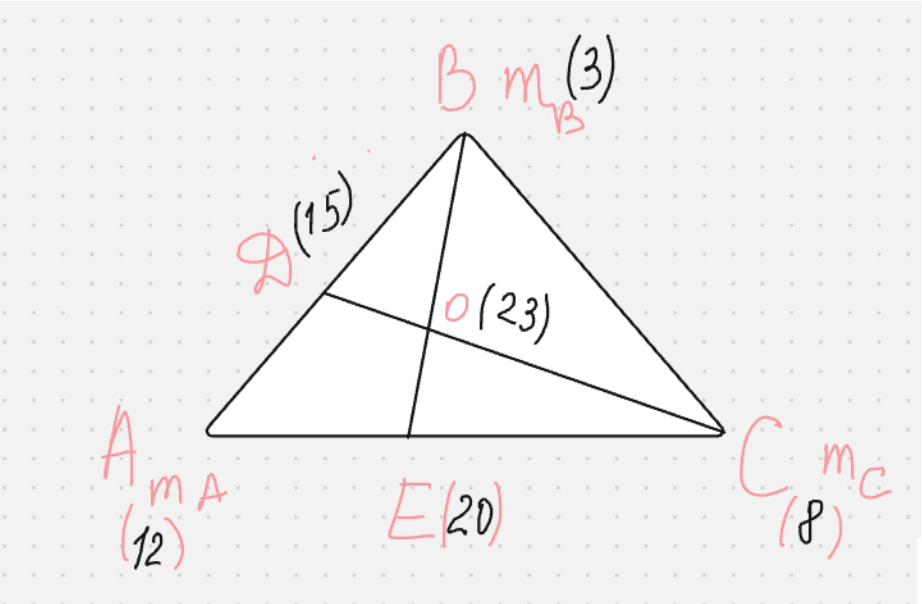
Теперь найдем отношения, в которых точка O делит отрезки:

- На отрезке BE: $BO : OE = m(E) : m(B) = 20 : 3$.
- На отрезке CD: $CO : OD = m(D) : m(C) = 15 : 8$.

3. **«Взвешивание» площадей**

- $m(A) = 12$
- $m(C) = 8$
- $m(B) = 3$

В методе масс есть замечательное свойство: площадь треугольника, образованного точкой пересечения чевиан (O) и двумя вершинами, пропорциональна массе третьей вершины.



Пусть S — общая площадь $\triangle ABC$.

. Площади треугольников с вершиной в точке O

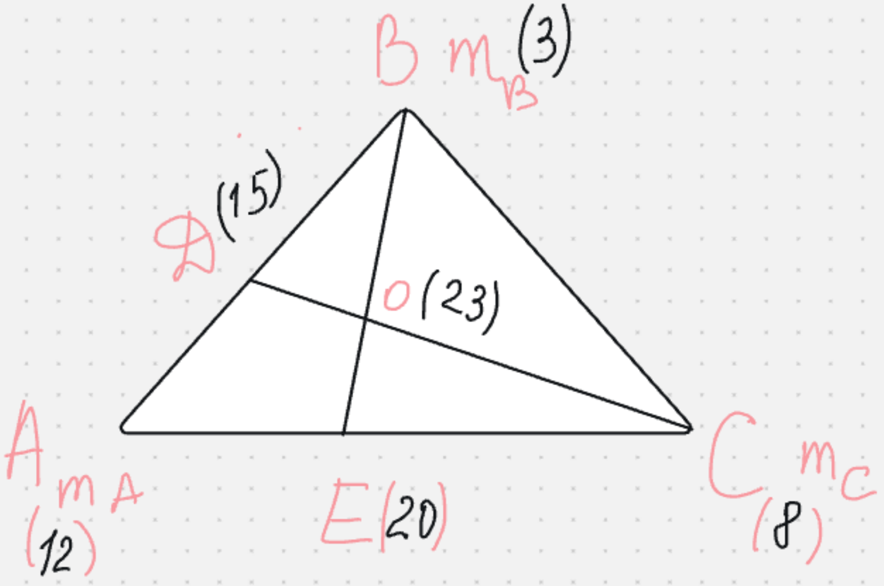
- $S_{\triangle BOC} = \frac{m(A)}{m(A)+m(B)+m(C)} \cdot S = \frac{12}{12+3+8} S = \mathbf{\frac{12}{23} S}$
- $S_{\triangle AOC} = \frac{m(B)}{23} \cdot S = \mathbf{\frac{3}{23} S}$
- $S_{\triangle AOB} = \frac{m(C)}{23} \cdot S = \mathbf{\frac{8}{23} S}$

«Взвешивание» площадей

В методе масс есть замечательное свойство: площадь треугольника, образованного точкой пересечения чевиан (O) и двумя вершинами, пропорциональна массе третьей вершины.

Пусть S — общая площадь $\triangle ABC$.

- $S_{\triangle BOC} = \frac{m(A)}{m(A)+m(B)+m(C)} \cdot S = \frac{12}{12+3+8} S = \mathbf{\frac{12}{23} S}$



1) $\triangle_1 ABC$ и $\triangle_2 DBC$ имеют общую h:

$\frac{S_{\triangle 1}}{S_{\triangle 2}} = \frac{AB}{BD} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ (как отношение основ-й) $\Rightarrow S_{DBC} = \frac{4}{5} S_{ABC}$

2) $\triangle_3 BEC$ и $\triangle_1 ABC$ имеют общую h:

$\frac{S_{\triangle 1}}{S_{\triangle 3}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ (как отношение основ-й) $\Rightarrow S_{BEC} = \frac{3}{5} S_{ABC}$

3) $S_{DBO} = S_{DBC} - S_{BOC} = \frac{4}{5} S_{ABC} - \frac{12}{23} S_{ABC} = \frac{32}{115} S_{ABC}$

4) $S_{ADOE} = S_{ABC} - S_{DBO} - S_{BEC}$ 23

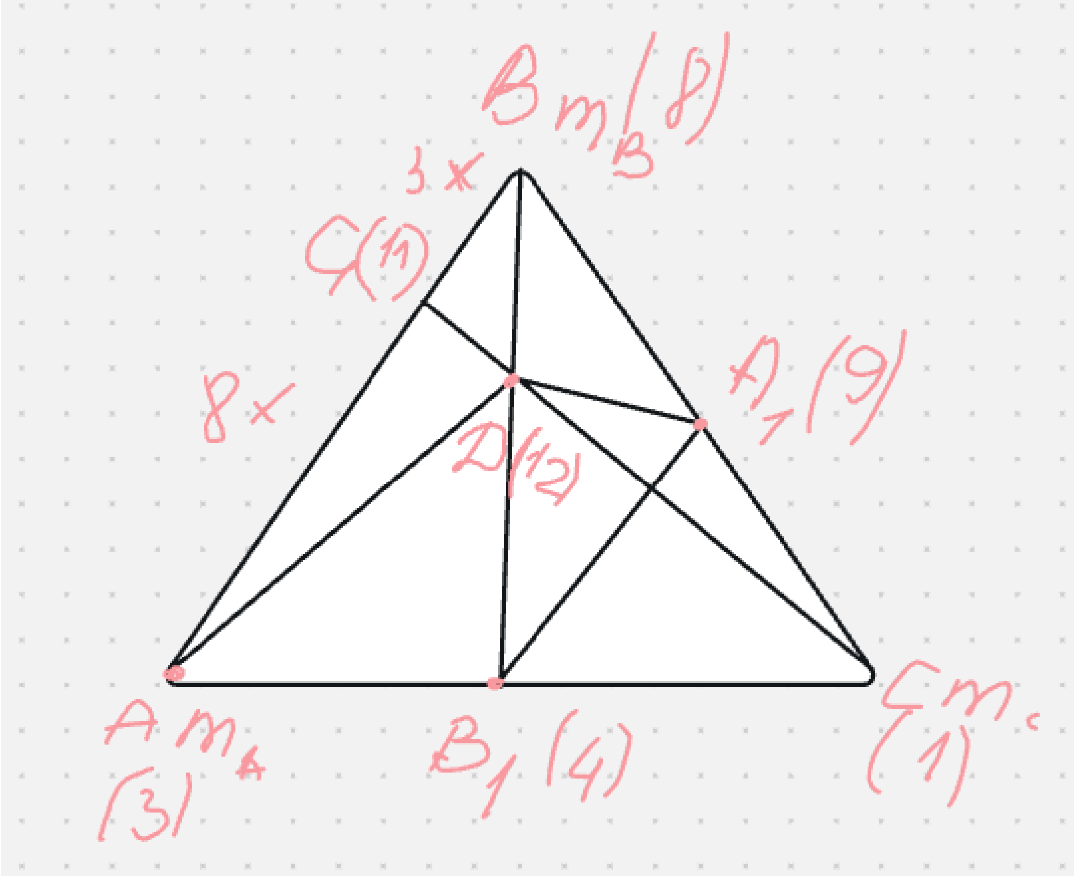
$S_{ADOE} = S_{ABC} - \frac{32}{115} S_{ABC} - \frac{3}{5} S_{ABC}$

$S_{ADOE} = \frac{115-32-69}{115} S_{ABC} = \frac{14}{115} S_{ABC}$

Ответ: $S_{ADOE} : S_{ABC} = \frac{14}{115}$

ЗАДАЧА №2_17_ЕГЭ

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=8:3, BA1:A1C=1:2, AB1:B1C=1:3. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм



Решение

1. Расстановка масс

Для того чтобы точка на стороне была центром масс, веса в вершинах должны быть обратно пропорциональны отрезкам, на которые эта точка делит сторону.

- **Рассматриваем сторону** AB: Дано $AC_1 : C_1B = 8 : 3$. Чтобы точка C_1 была центром масс, положим:
  - $m(A) = 3$
  - $m(B) = 8$
  - Тогда масса точки $C_1 = 3 + 8 = 11$.
- **Рассматриваем сторону** AC: Дано $AB_1 : B_1C = 1 : 3$. У нас уже есть $m(A) = 3$. Чтобы точка B_1 была центром масс отрезка AC:
  - $3 \cdot 1 = m(C) \cdot 3 \implies m(C) = 1$.
  - Тогда масса точки $B_1 = 3 + 1 = 4$.

2. Свойства точки D

Точка D — это точка пересечения чевиан BB_1 и CC_1. По свойству центра масс системы, D является центром масс всего треугольника с вершинами $A(3), B(8), C(1)$.

- Масса точки $D = 3 + 8 + 1 = 12$.
- Так как D лежит на BB_1, она делит его в отношении:

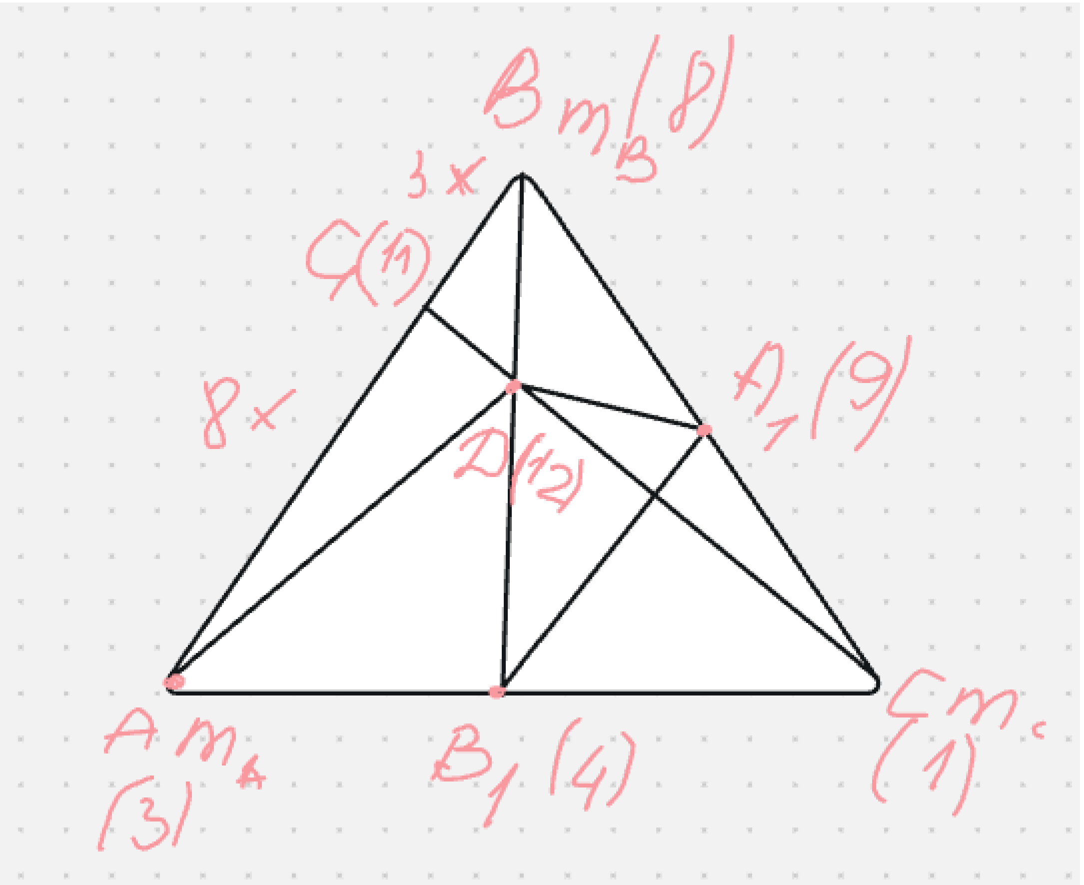
$$BD : DB_1 = m(B_1) : m(B) = 4 : 8 = 1 : 2$$

3. Доказательство

Чтобы доказать, что ADA_1B_1 — параллелограмм, нам нужно показать, что две его противоположные стороны параллельны и равны. Рассмотрим сторону AB_1 и отрезок DA_1.

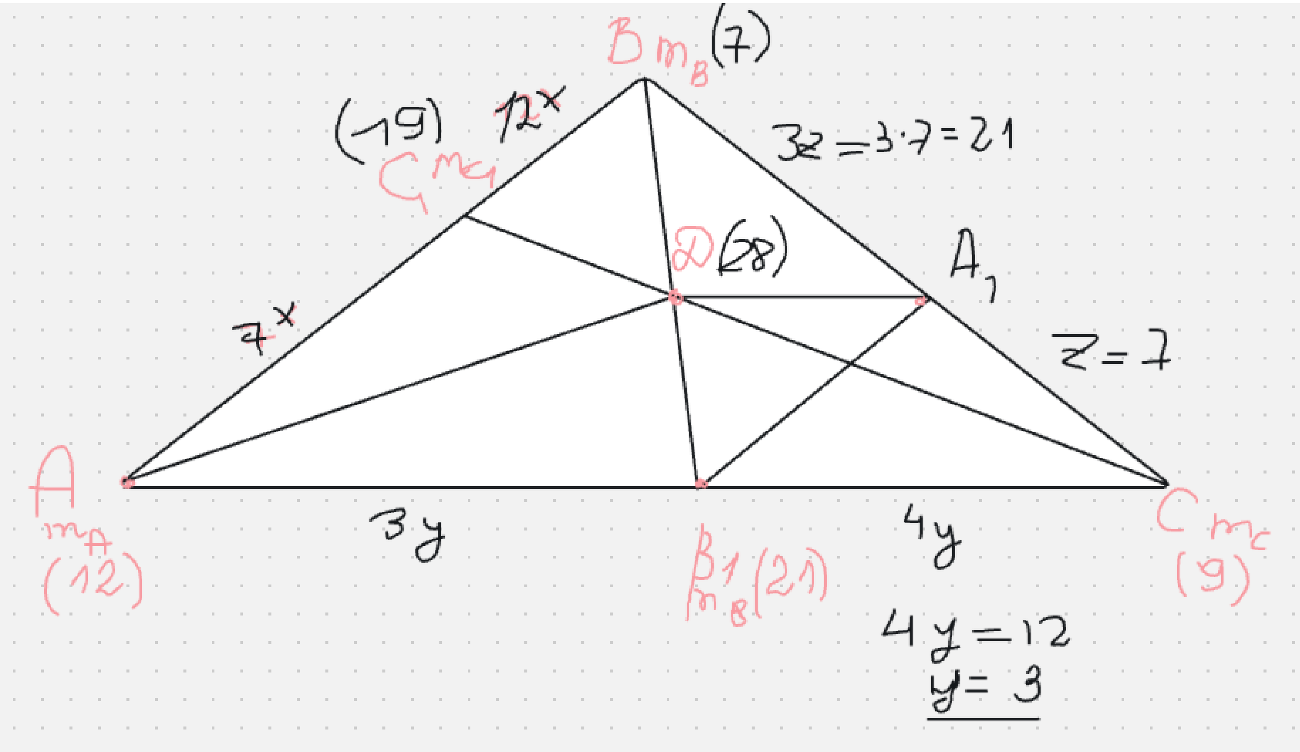
1. **В треугольнике BB_1C:**
   - Точка D лежит на BB_1 и делит её в отношении $BD : DB_1 = 1 : 2$ (мы это вычислили).
   - Точка A_1 лежит на BC и по условию делит её в отношении $BA_1 : A_1C = 1 : 2$.
2. **По обратной теореме Фалеса:**
   Так как отношения на сторонах угла B равны ($\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$), отрезок DA_1 параллелен основанию B_1C.
   $DA_1 \parallel B_1C$. Поскольку точки A, B_1, C лежат на одной прямой, то $DA_1 \parallel AB_1$.
3. **Подобие треугольников:**
   Треугольник BDA_1 подобен треугольнику BB_1C с коэффициентом $k = \frac{BD}{BB_1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$.
   Значит, $DA_1 = \frac{1}{3}B_1C$.
4. **Сравнение с AB_1:**
   По условию $AB_1 : B_1C = 1 : 3$, значит $AB_1 = \frac{1}{3}B_1C$.
   Получаем: $DA_1 = AB_1$.

Вывод: В четырёхугольнике ADA_1B_1 стороны AB_1 и DA_1 параллельны и равны. Следовательно, это параллелограмм.



ЗАДАЧА №3_17_ЕГЭ На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=7:12, BA1:A1C=3:1, AB1:B1C=3:4. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм

Для решения этих задач методом центров масс мы будем использовать один и тот же алгоритм: подберем массы в вершинах так, чтобы точка D стала центром масс всей системы.



ВНИМАНИЕ: AA1- не чевиана

1. Расстановка масс (Рычаг Архимеда)

Нам нужно подобрать такие массы $m(A)$, $m(B)$ и $m(C)$, чтобы точки на сторонах стали точками равновесия.

- **Сторона AB ($AC_1 : C_1B = 7 : 12$):** Массы обратно пропорциональны отрезкам. Пусть $m(A) = 12$, тогда $m(B) = 7$.
- **Сторона AC ($AB_1 : B_1C = 3 : 4$):** Масса в A уже равна 12. Находим массу в C:

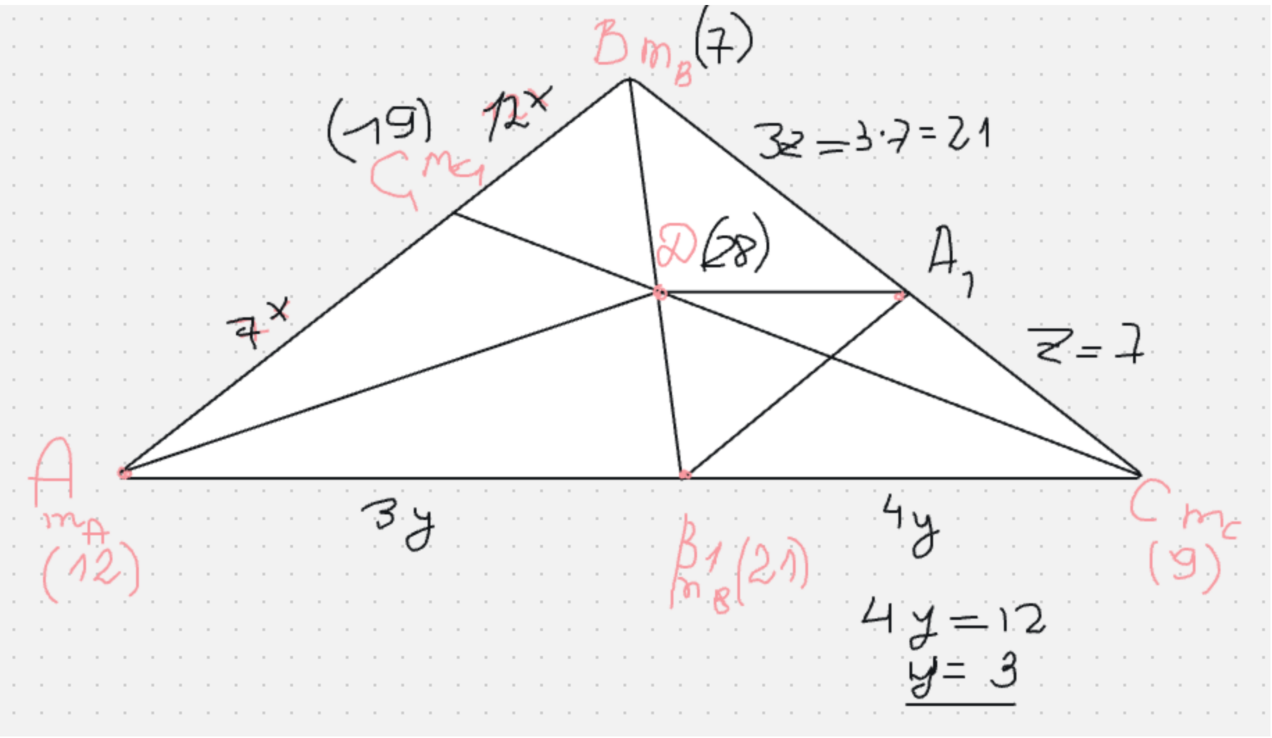
$$12 \cdot 3 = m(C) \cdot 4 \implies m(C) = 9$$

Итог: $m(A) = 12$, $m(B) = 7$, $m(C) = 9$.

2. Поиск отношений на чевианах

Точка D — это центр масс всей системы $\{12A, 7B, 9C\}$. Она лежит на пересечении всех чевиан.

- **Чевиана BB_1:** Точка B_1 — это центр масс стороны AC, её масса $m(B_1) = 12 + 9 = 21$.
- **Деление $BD : DB_1$:** По правилу рычага $BD : DB_1 = m(B_1) : m(B) = 21 : 7 = \mathbf{3 : 1}$.



3. Доказательство параллелограмма (ADA_1B_1)

Чтобы доказать, что это параллелограмм, достаточно показать, что DA_1 параллельна и равна AB_1.

Шаг А (Параллельность):
Рассмотрим угол B.

1. На стороне BB_1 точка D отсекает отношение $BD : BB_1 = 3 : (3+1) = \mathbf{3/4}$.
2. На стороне BC точка A_1 (по условию $BA_1 : A_1C = 3 : 1$) отсекает отношение $BA_1 : BC = 3 : (3+1) = \mathbf{3/4}$.
3. По **обратной теореме Фалеса** (или подобию $\triangle BDA_1 \sim \triangle BB_1C$), так как отношения равны, $DA_1 \parallel B_1C$.
4. Поскольку A, B_1, C лежат на одной прямой, $DA_1 \parallel AB_1$.

Шаг Б (Равенство):

1. Из подобия $\triangle BDA_1 \sim \triangle BB_1C$ с коэффициентом $k = 3/4$ следует, что $DA_1 = \frac{3}{4}B_1C$.
2. По условию $AB_1 : B_1C = 3 : 4$, значит $AB_1 = \frac{3}{4}B_1C$.
3. Следовательно, $DA_1 = AB_1$.

Вывод: В четырехугольнике ADA_1B_1 две противоположные стороны равны и параллельны $\implies$ это параллелограмм.

Задачи можно запрашивать ИИ: https://gemini.google.com/

1. Тип «Отношение отрезков внутри треугольника» (ЕГЭ и ОГЭ)

Это прямые аналоги вашей задачи. Нужно найти, в каком отношении точка пересечения делит одну из чевиан.

- **Задача №1:** В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки M и K так, что $AM : MB = 1 : 4$ и $BK : KC = 3 : 2$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Найдите отношение $AO : OK$.
- **Задача №2:** Прямая, проходящая через вершину C и середину стороны AB, пересекает чевиану AD, делящую BC в отношении $1 : 3$, в точке P. Найдите $AP : PD$.

---

2. Тип «Площади частей треугольника» (ЕГЭ №17)

Здесь метод центров масс используется как вспомогательный шаг: сначала находим отношения отрезков, а затем через них — площади.

- **Задача №3:** На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки C_1 и A_1 такие, что $AC_1 : C_1B = 2 : 3$, а $BA_1 : A_1C = 1 : 2$. Отрезки AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Найдите, какую часть площади треугольника ABC составляет площадь четырёхугольника BC_1OA_1.
  - *Подсказка:* Метод центров масс поможет найти $AO : OA_1$ и $CO : OC_1$, после чего площадь четырёхугольника находится как разность $S_{ABC} - (S_{ACC_1} + S_{AA_1C} - S_{AOC})$.

---

3. Тип «Параллельные прямые и отношения» (ЕГЭ №17)

Задачи, где нужно доказать параллельность (как в ваших примерах) или использовать её для поиска отрезков.

- **Задача №4:** В треугольнике ABC точка K на стороне AC и точка M на стороне AB делят их в отношении $AK : KC = 2 : 3$ и $AM : MB = 2 : 3$. Докажите, что $MK \parallel BC$, и найдите площадь треугольника AMK, если $S_{ABC} = 25$.
  - *Метод:* Здесь массы в B и C будут одинаковыми, что сразу дает симметрию и параллельность.

Задачи №25 ОГЭ на самостоятельное решение_ФИПИ

1. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что AE : EC = 2: 3, а на стороне AB взята точка D так, что AD : DB = 1: 4 . Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.
2. В треугольнике *ABC* на его медиане *BM* отмечена точка *K* так, что *BK* : *KM* = 7 : 3 . Прямая *AK* пересекает сторону *BC* в точке *P*. Найдите отношение площади треугольника *BKP* к площади четырёхугольника *KPCM*.
3. В треугольнике ABC проведены чевианы BM и AN так, что BN: NC=2:3, а AM: MC=2:1. Найти BO:OM и AO:ON, где O – точка пересечения чевиан.
4. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что BD : DC=1:2. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?
5. Медиана *BM* и биссектриса *AP* треугольника *ABC* пересекаются в точке *K*, длина стороны *AC* втрое больше длины стороны *AB*. Найдите отношение площади треугольника *ABK* к площади четырёхугольника *KPCM*.
6. В треугольнике ABC проведены чевианы BM и AN так, что BN: NC=4:3, а AM: MC=2:3. Найти какую часть площади ABC составляет площадь CMON.

ЗАДАЧИ №17_ЕГЭ (сайт Ширяева Е: https://vk.com/topic-150027546_54086587)

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=7:12, BA1:A1C=3:1, AB1:B1C=3:4. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N. а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны. б) Найдите площадь четырёхугольника BOMN, если CN=4 и AM:MC=1:3
3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=8:3, BA1:A1C=1:2, AB1:B1C=1:3. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм. б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, AC=28, BC=18
4. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что ∠AEM=∠CMK. б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если AM:MC=1:4
5. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что ∠AEM=∠CMK. б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если AM:MC=1:5
6. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны. б) Найдите отношение AM:MC, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.
7. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны. б) Найдите отношение AM:MC, если площади треугольников AEM и CMK равны 64 и 49 соответственно.
8. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA1, BB1 и CC1 пересекаются в точке H. Через точку C1 параллельно высоте BB1 проведена прямая, пересекающая высоту AA1 в точке K. а) Докажите, что AB·KH=BC·C1H. б) Найдите отношение площадей треугольников C1HK и ABC, если AB=4, BC=5, AC= 17 .

«...Я счел нужным написать тебе и... изложить особый метод, при помощи которого ты получишь возможность находить некоторые математические теоремы. Я уверен, что этот метод будет тебе ничуть не менее полезен и для доказательства самих теорем».

Архимед. Послание к Эратосфену «О механических теоремах»

https://www.mathedu.ru/text/balk_boltyanskiy_geometriya_mass_1987/p0/