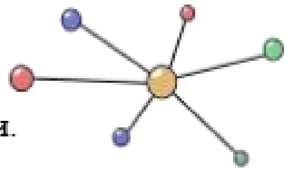
Решение геометрических задач из ОГЭ и ЕГЭ методом центра масс

МАОУ гимназия №39 «Французская гимназия»
Спикер Ведерникова Наталья Владимировна

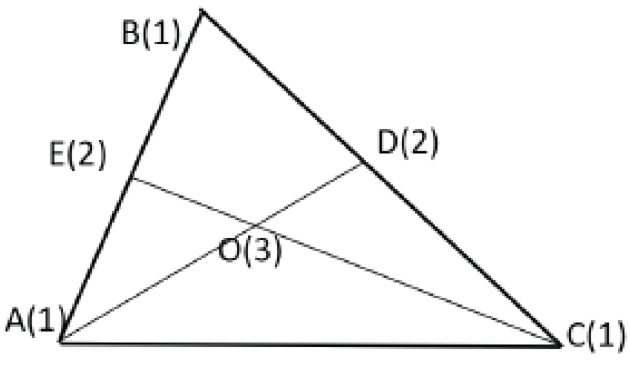
Метод центра масс (теория)

Материальная точка — это точка, в которой сосредоточена некоторая масса. Обозначается: A(m), где A — точка, m — её масса.
Система материальных точек — это несколько точек, каждая из которых имеет массу.



Центр масс — это такая точка, в которой вся система находится в равновесии.
Её можно представить как точку «баланса» всей конструкции.
Центр масс обладает следующими свойствами:
1. **Единственность.** У любой системы материальных точек существует только один центр масс.
2. **Правило двух точек** (правило рычага). Центр масс двух точек лежит на отрезке, соединяющем эти точки, и делит его обратно пропорционально массам: m1*AC=m2*BC
3. **Масштаб**. Если массы всех точек умножить на одно и то же число, центр масс не изменится.
4. **Объединение точек**. Несколько точек можно заменить одной точкой с массой, равной сумме их масс, расположенной в их центре масс. При этом положение общего центра масс не изменится.

Задача 1. Доказать, что в любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1 (от вершины).
Доказательство.



Рассмотрим треугольник ABC. В его вершинах находятся равные массы: 1, 1, 1. Центр масс точек A и B — середина AB (точка E), с массой 2.
Тогда центр масс системы лежит на медиане CE
Аналогично, он лежит и на других медианах. Значит, все медианы пересекаются в одной точке. По правилу рычага: CO:OE=2:1.
Следовательно, медианы делятся в отношении 2:1.

Задача 2. Пусть дан треугольник ABC. BM – медиана, AN делит сторону BC в отношении 1:2 от вершины B. AN пересекает BM в точке O. Найти отношение BO:OM.

Решение. Назначим массы вершинам A и C : m(A)=m(C)=1

По условию BN:NC=1:2⇒m(B)=2

Найдём массу точки M

Так как BM — медиана, точка M — середина AC. Значит

m(M)=m(A)+m(C)=1+1=2

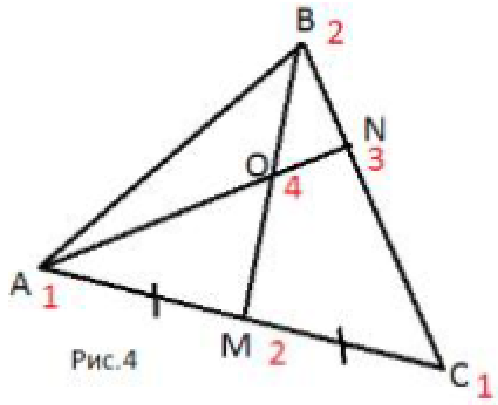
Рассмотрим отрезок BM

в точке B масса 2

в точке M масса 2

Центр масс делит отрезок пополам

Ответ: BO:OM=1:1



Задача 3. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка M так, что BM:MC=3:2. Точка P делит отрезок AM в отношении 2:1, считая от точки A. Прямая BP пересекает сторону AC в точке B1. Какую часть от площади треугольника ABCC составляет площадь четырёхугольника PB1CM?

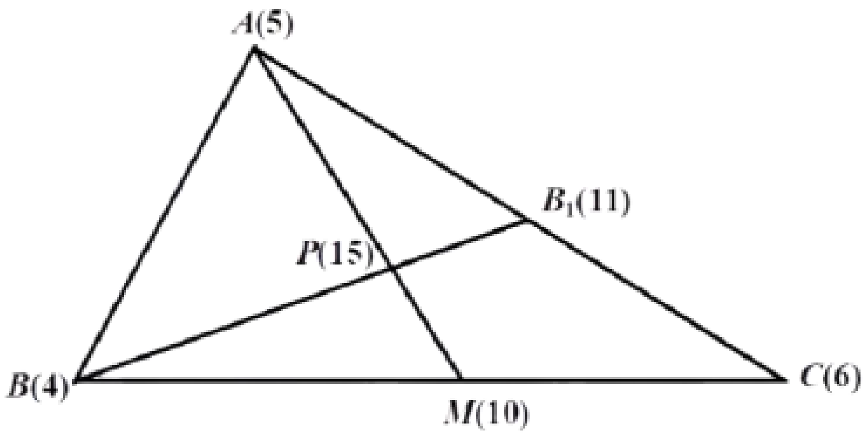
Пусть $S_{ABC} = S$

Тогда $\dfrac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}} = \dfrac{AB_1}{CB_1} = \dfrac{6}{5}$, $S_{ABB_1} = \dfrac{6}{11}S, \quad S_{CBB_1} = \dfrac{5}{11}S$

$\dfrac{S_{ABP}}{S_{AB_1P}} = \dfrac{BP}{B_1P} = \dfrac{11}{4}$, $\quad S_{ABP} = \dfrac{11}{15}S_{ABB_1} = \dfrac{11}{15} \cdot \dfrac{6}{11}S = \dfrac{2}{5}S$

$\dfrac{S_{ABP}}{S_{MBP}} = \dfrac{AP}{MP} = \dfrac{10}{5} = 2$, $\quad S_{MBP} = \dfrac{1}{2}S_{ABP} = \dfrac{1}{5}S$

$S_{PB_1CM} = S - S_{MBP} - S_{ABB_1}$, $\quad S_{PB_1CM} = S - \dfrac{1}{5}S - \dfrac{6}{11}S = \dfrac{14}{55}S$



Подготовительные задачи

1. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки M и H так, что AM:MC=4:5, BH:HC=7:3. Отрезки BM и AH пересекаются в точке O. Найти длину отрезка AO, если известно, что длина отрезка OH=10.(32)
2. В трапеции ABCD длины оснований AD и BC относятся как 2:1. На стороне AB выбрана точка K так, что AK:KB = 2:1, а на стороне CD выбрана точка M так, что DM: MC=4:3. Отрезки AM и DK пересекаются в точке O. Найти отношение AO:OM.
3. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки K и L так, что AK : KB = 4:7; AL : LC = 3:2. Прямая KL пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найти отношение CM:BC. (8:13)

25 задача ОГЭ

1. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$. (0,6)
2. Площадь треугольника ABC равна 80. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E, при этом $BD : CD = 1 : 3$. Найдите площадь четырехугольника $EDCK$. (36)
3. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что $BK : KM = 4 : 1$. Прямая AK пересекает сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$. (12:7)
4. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади четырехугольника $KPCM$ к площади треугольника AMK. (5:3)
5. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади четырехугольника KPCM к площади треугольника ABC. (9:20)
6. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника KPCM. (4:9)
7. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 9:7. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника KPCM. (112:135)
8. В треугольнике ABC на его медиане BM отмечена точка K так, что Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC. (0,15)
9. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC относится к длине стороны AB как 7:10. Найдите отношение площади треугольника AKM к площади треугольника ABC. (7:54)

Задача 17 ЕГЭ

1. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=7:12, BA1:A1C=3:1, AB1:B1C=3:4. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм
2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На катете AC взята точка M. Окружность с центром O и диаметром CM касается гипотенузы в точке N. а) Докажите, что прямые MN и BO параллельны. б) Найдите площадь четырёхугольника BOMN, если CN=4 и AM:MC=1:3
3. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC отмечены точки C1, A1 и B1 соответственно, причём AC1:C1B=8:3, BA1:A1C=1:2, AB1:B1C=1:3. Отрезки BB1 и CC1 пересекаются в точке D. а) Докажите, что четырёхугольник ADA1B1 – параллелограмм. б) Найдите CD, если отрезки AD и BC перпендикулярны, AC=28, BC=18
4. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что $\angle AEM=\angle CMK$. б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если AM:MC=1:4
5. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что $\angle AEM=\angle CMK$. б) Найдите отношение площадей треугольников AEM и CMK, если AM:MC=1:5
6. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны. б) Найдите отношение AM:MC, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.
7. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно. а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны. б) Найдите отношение AM:MC, если площади треугольников AEM и CMK равны 64 и 49 соответственно.
8. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA1, BB1 и CC1 пересекаются в точке H. Через точку C1 параллельно высоте BB1 проведена прямая, пересекающая высоту AA1 в точке K. а) Докажите, что $AB \cdot KH=BC \cdot C1H$. б) Найдите отношение площадей треугольников C1HK и ABC, если AB=4, BC=5, AC= 17 .

Ссылка на материалы: https://clck.ru/3SieSo