Основные принципы оценивания заданий с развёрнутым ответом ОГЭ по математике (алгебра)

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

20 Решите уравнение $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$.

Решение.

При $x\le 6$ исходное уравнение приводится к виду:

$$x^2-6x-7=0,$$

откуда $x=-1$ или $x=7$. Условию $x\le 6$ удовлетворяет только решение $x=-1$.

Ответ: -1.

ОДЗ или проверка

№20

$x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$

$x^2-6x+\sqrt{6-x}-\sqrt{6-x}-7=0$

$x^2-6x-7=0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ x_1\cdot x_2=-7 \end{cases}$$

$x_1=7$ $x_2=-1$

Ответ: $x=-1$

ОДЗ:

$\sqrt{6-x}\geqslant 0$

$6-x\geqslant 0$

$-x\geqslant -6$

$x\le 6$

Решите уравнение $(x-2)\left(x^2+2x+1\right)=4(x+1)$

$$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$$

$$(x+1)\left((x-2)(x+1)-4\right)=0$$

$\Rightarrow$ $x+1=0$ или $(x-2)(x+1)-4=0$

$x=-1$ $\qquad$ $x^2-x-6=0$

$$D=1-4(-6)=\sqrt{25}=5$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=2$$

$$x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

1 балл

~~Ответ: $\sqrt{13}$; 6~~ $\qquad$ Ответ: $-1; 2; 3$

20 Решите уравнение $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$.

Решение.

Пусть $t=(x-3)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2-3t-10=0,$$

откуда $t=-2$ или $t=5$.

Уравнение $(x-3)^2=-2$ не имеет корней. **! !** **1 балл**

Уравнение $(x-3)^2=5$ имеет корни $3-\sqrt{5}$ и $3+\sqrt{5}$.

Ответ: $3-\sqrt{5}$; $3+\sqrt{5}$.

20. $(x-3)^4-3(x-3)^2-10=0$

$(x-3)^2=t$

$t^2-3t-10=0$

$t_1+t_2=3$

$t_1\cdot t_2=-10$

$\left[\begin{array}{l} t_1=5 \\ t_2=-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} (x-3)^2=5 \\ (x-3)^2=-2 \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} x-3=\sqrt{5} \\ x-3=-\sqrt{5} \end{array}\right.$

$x-3=\sqrt{-2}$ – решений нет.

$\left\{\begin{array}{l} x=3+\sqrt{5} \\ x=3-\sqrt{5} \end{array}\right.$

Ответ: $3+\sqrt{5}$, $3-\sqrt{5}$

0 баллов

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x^2 - 2x = y, \\ 3x - 2 = y. \end{cases}$

Решение.
Правые части уравнений системы равны, значит,

$$3x^2 - 2x = 3x - 2;\ (3x-2)(x-1) = 0,$$

откуда $x = 1$ или $x = \frac{2}{3}$.

При $x = 1$ получаем $y = 1$.

При $x = \frac{2}{3}$ получаем $y = 0$.

Решения системы уравнений: $(1;1)$ и $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Ответ: $(1;1)$; $\left(\frac{2}{3};0\right)$.

Если делят первое уравнение на второе, это приводит к потере решения - 0 баллов.

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Типичные ошибки при оформлении 21 задания с развёрнутым ответом (текстовая задача), за которые могут снять баллы:

- Нет описания вводимых переменных.
- Нет ограничений на переменные.
- Нет единиц измерений к описываемым в задачах величинах (время, скорость, расстояние и др.) Необходимо хотя бы раз написать единицы измерения, либо при составлении вспомогательной таблицы, либо при выполнении действий, либо в записи ответа.
- Нарушено соответствие единиц измерения.
- Нет пояснений, как получается математическая модель.
- Арифметические ошибки.
- Без каких-либо пояснений «отбрасывают» один из корней уравнения.
- В ответе неверно указаны единицы измерения и другие недочёты.

21 Два велосипедиста одновременно отправляются в 105-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 16 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Решение.
Пусть скорость второго велосипедиста равна v км/ч, тогда скорость первого велосипедиста равна $v+16$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{105}{v}=\frac{105}{v+16}+4;$$
$$105v+1680=105v+4v^2+64v;$$
$$v^2+16v-420=0,$$

откуда $v=14$.
Ответ: 14 км/ч.

Если используются обозначения V, S, t, то уравнение можно принять без обоснований, если ввели переменную *x*, то надо прописать, что ей обозначили и ввести ограничения (*x>0*).

Из А в В одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 78 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью больше скорости первого на 7 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.
Пусть весь путь составляет $2s$ км, а скорость первого автомобиля v км/ч, тогда вторую половину пути второй автомобиль ехал со скоростью $v+7$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{2s}{v}=\frac{s}{78}+\frac{s}{v+7};$$
$$156v+1092=v^2+7v+78v;$$
$$v^2-71v-1092=0,$$

откуда $v=84$.
Ответ: 84 км/ч.

S=1, то 0 баллов.

Пример 1. Баржа прошла против течения реки 24 км и, повернув обратно, прошла ещё 32 км, затратив на весь путь 4 часа. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

№21.

Пусть x км/ч - собственная скорость баржи, тогда $(x+5)$ км/ч скорость баржи по течению и $(x-5)$ км/ч - скорость баржи против течение. $x \geq 0$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{24}{x-5}^{\backslash x+5} + \frac{32}{x+5}^{\backslash x-5} = 4$$

$$\frac{24x+120+32x-160}{(x-5)(x+5)} = 4$$

$$\frac{56x-40}{x^2-25} = \cancel{4}\ \frac{4}{1}$$

$$4(x^2-25) = 56x-40$$

$$4x^2-100-56x+40=0$$

$$4x^2-56x-60=0 \quad |:4$$

$$x^2-14x-15=0$$

$$a=1;\ b=-14;\ c=-15$$

$$D = b^2-4\cdot a\cdot c = (-14)^2-4\cdot 1\cdot(-15) = 196+60 = 256$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{256} = 16$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{14+16}{2\cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ км/ч}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{14-16}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ км/ч}$$ (не подходит, так как скорость не может быть отрицательной и $x \geq 0$)

Ответ: 15 км/ч.

2 балла

Два велосипедиста одновременно отправляются в 209-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 8 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 8 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 11 км/ч.

21. Пусть x км/ч – скорость 2 велосипедиста, тогда (x+8) км/ч – скорость 1 велосипедиста, общее расстояние 209 км.

$x > 0$

$\frac{209}{x}$ ч – время 2 велосипедиста

$\frac{209}{x+8}$ ч – время 1 велосипедиста.

$\frac{209}{x}^{\backslash x+8} - \frac{209}{x+8}^{\backslash x} = 8^{\backslash x(x+8)}$

$209x + 1672 - 209x = 8x^2 + 64x$

$-8x^2 - 64x + 1672 = 0 \quad | : (-8)$

$x^2 + 8x - 209 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-209) = 64 + 836 = 900 \ (D > 0)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 - 30}{2} = -16$ – не подходит по условию задачи.

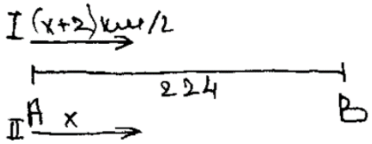
$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8 + 30}{2} = 11.$

Ответ: 11 км/ч.

1 балл

Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч.



	v	t	S
I	$(x+2)$ км/ч	$\frac{240}{x+2}$ ч	240км
II	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км

Замена условия.
0 баллов

По условию задачи известно, что первый велосипедист прибыл к финишу раньше на 2 часа второго, отсюда уравнение.

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+2} = 2$$

$$\frac{240}{x}^{\backslash x+2} - \frac{240}{x+2}^{\backslash x} - 2^{\backslash (x^2+2x)}$$

$$\frac{240(x+2) - 240x - 2(x^2+2x)}{x(x+2)} = 0$$

$$\cancel{240x} + 480 - \cancel{240x} - 2x^2 - 4x = 0$$

$$-2x^2 - 4x + \cancel{240}\,480 = 0 \quad /: -2$$

$$x^2 + 2x - 240 = 0$$

ОДЗ

$x(x+2) \neq 0$

$x \neq 0 \quad x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

$D = b^2 - 4ac$ -240

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (\cancel{-480}) = 4 + 960 = 964$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{964}}{2}$ — не подходит по усл. задачи т.к. <0

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ — скорость второго велосипедиста

Ответ: $\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ скорость второго велосипедиста.

Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

И + П = 14

П + В = 15

В + И = 30

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$$

$$-2z+\frac{3}{30}=\frac{1}{14}$$

$$-2z=\frac{1}{14}-\frac{3}{30}$$

$$-2z=\frac{30-42}{420}$$

$$2z=\frac{12}{420}$$

$$z=\frac{12}{420}:2=\frac{12}{420}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{70}$$

$$y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}$$

$$x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{70-30}{2100}=\frac{40}{2100}=\frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{55}{1050}+\frac{4}{210}=\frac{7}{210}+\frac{55}{1050}=\frac{1}{30}+\frac{55}{1050}=\frac{1050+1650}{31500}=$$

$$=\frac{2700}{31500}=\frac{27}{315}\text{ (ч)}$$

$$\frac{27}{315}\cdot\frac{60}{1}=\frac{1620}{315}=5\frac{45}{315}=5\frac{1}{7}\text{ (минут)}$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Не описаны переменные, перепутал производительность труда и время.
0 баллов

Задание 22

Основным условием положительной оценки за решение задания является верное построение графика.

Верное построение графика включает в себя:

-масштаб,

-содержательную таблицу значений или алгоритм (объяснение построения),

-указание **координат выколотой точки и обозначении на графике в соответствии с ее координатами,**

-указание **координат граничных точек (точек «склеивания» функции или точек «разрыва»),** обосновать можно с помощью таблицы**.**

Если при построении графика кривой, содержащей части парабол сделаны вычислительные ошибки при нахождении координат вершины параболы (одной из них), то график построен неверно.

Нахождение значения параметра должно быть обосновано в виде словесного описания или в виде геометрического пояснения (проведение прямых, которые могут быть подписаны на рисунке).

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Упражнение 22.1. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

№22. $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$

1) $y=x^2+2$ при $x \geq -2$

$y=x^2+2$ – парабола вида $y=x^2$

$x_0=-\frac{b}{2a}=0$

$y_0=0+2=2$

Вершина $(0;2)$

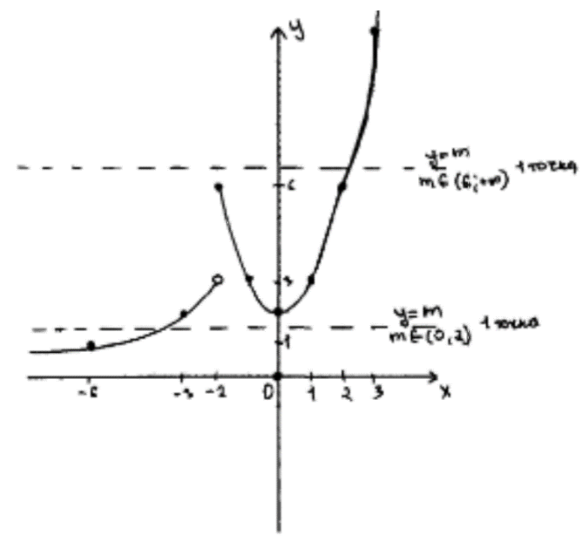
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11

2) $y=-\frac{6}{x}$ при $x<-2$

$y=-\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

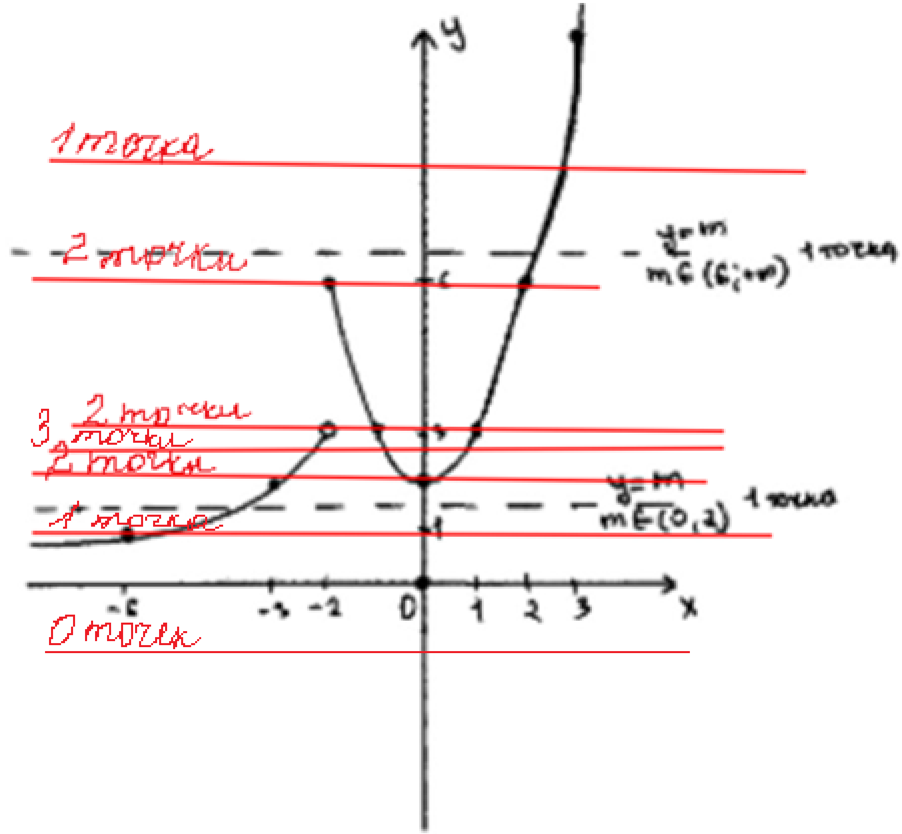
← выколотая точка



$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)\cup(6;+\infty)$

№22. $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x\ge -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x<-2\end{cases}$



1) $y=x^2+2$ при $x\ge -2$

$y=x^2+2$ – парабола вида $y=x^2$

$x_0=-\frac{b}{2a}=0$

$y_0=0+2=2$

Вершина $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11

2) $y=-\frac{6}{x}$ при $x<-2$

$y=-\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

← выколотая точка

$y(-2)=3$ $(-2;3)$ – выколотая точка

$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)\cup(6;+\infty)$

2 балла

22.

$$y = \begin{cases} x^2+2, & x \geq -2 \\ -\frac{6}{x}, & x < -2 \end{cases}$$ — кусочно заданная функция с $D(y) = \mathbb{R}$

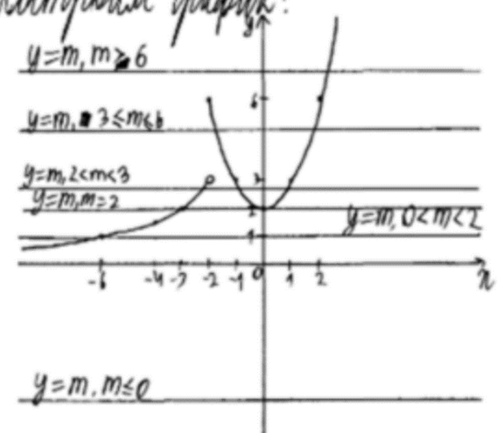
$y = x^2+2$ — квадратичная ф-ция, график — парабола с ветвями, направленными вверх и вершиной $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

$y = -\frac{6}{x}$ - ф-ция обратной пропорциональности, график - гипербола, расположенная в II и IV четвертях

x	-2	-3	-4	-6
y	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Построим график:



Прямая $y=m$ с графиком заданной ф-ции имеет: • 0 общих точек при $m \in (-\infty; 0]$

• 1 общую точку при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$

• 2 общие точки при $m \in \{2\} \cup [3;6]$

• 3 общие точки при $m \in (2;3)$

Ответ: $(0,2) \cup (6;+\infty)$

Постройте график функции

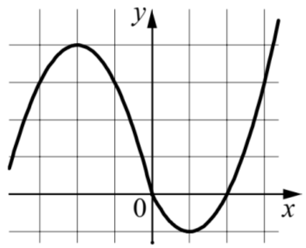
$$y = |x| \cdot (x+1) - 3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. Построим график функции $y = -x^2 - 4x$ при $x < 0$ и график функции $y = x^2 - 2x$ при $x \geq 0$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину одной из парабол. Получаем, что $m = -1$ или $m = 4$.

Ответ: $m = -1$; $m = 4$.



22. $y = |x| \cdot (x+1) - 3x$

1) $y = x(x+1) - 3x$

$y = x^2 + x - 3x$

$y = x^2 - 2x$ — Квадратичная функция. График - парабола, ветви вверх.

$x_0 = \frac{2}{2} = 1$

$y_0 = 1 - 2 = -1$

$(1; -1)$ - вершина

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

2) $y = -x(x+1) - 3x$

$y = -x^2 - x - 3x$

$y = -x^2 - 4x$ — Квадратичная функция. График-парабола, ветви вниз.

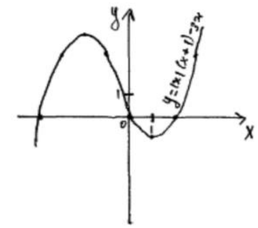
Смотреть на лист 1 →

$x_0 = \frac{4}{-2} = -2$

$y_0 = -4 + 8 = 4$

$(-2; 4)$ - вершина

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	3	4	3	0



$y = m$ - семейство прямых параллельных оси OX

при $m \in (-\infty; -1)$ - 1 точка пересечение

$m = -1$ - 2 точки пересечения

$m \in (-1; 4)$ - 3 точки пересечения

$m = 4$ - 2 точки пересечения

$m \in (4; +\infty)$ - 1 точка пересечения

Ответ: -1; 4.

2 балла

Постройте график функции

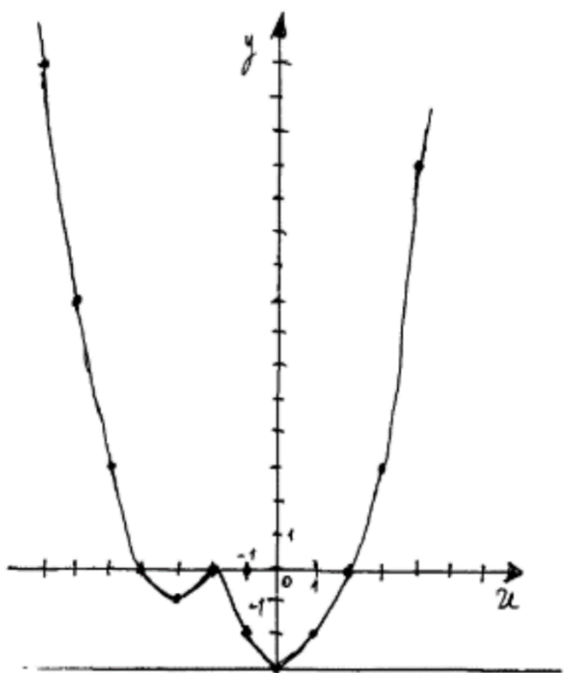
$$y = x^2 + 3x - 3|x + 2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№22 $y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

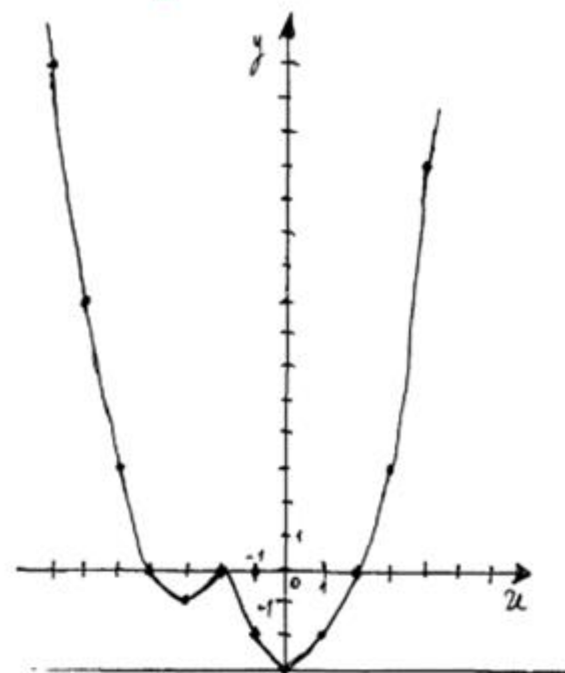
x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
y	-4	-3	0	3	12	-3	0	1	0	3	8	15



Ответ: $m \in [-1; 0]$

№22 $y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
y	-4	-3	0	3	12	-3	0	1	0	3	8	15



Ответ: $m \in [-1; 0]$

0 баллов

№22

$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

$|x+2| \geq 0$

$y = x^2 + 3x - 3(x+2) + 2$

$y = x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 6 + 2$

$y = x^2 - 4$

$|x+2| < 0$

$y = x^2 + 3x - 3(-x-2) + 2$

$y = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2$

$y = x^2 + 6x + 8$

$x_B = \frac{-b}{2a}$

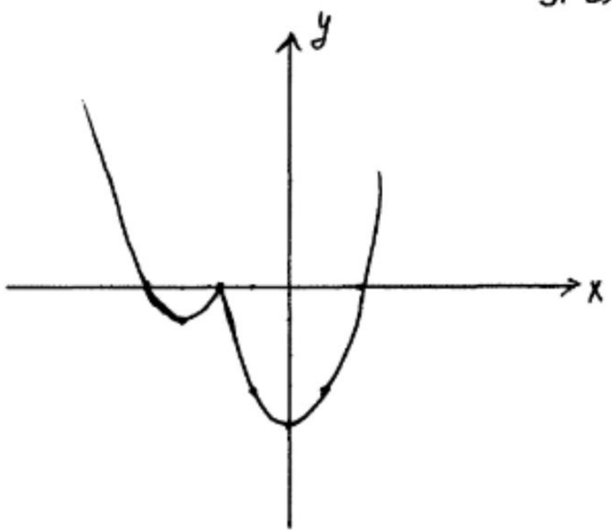
$x_B = \frac{-6}{2} = -3$

$y(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8$

$y(-3) = 9 - 18 + 8$

$y(-3) = -1.$ вершина $(-3; -1)$

x	-2	-4
y	0	0



$y = m$

$m = 0.$

Не указано ни одно числовое значение на осях.
0 баллов

Постройте график функции $y=\dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2.5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

$y=\dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$

(1сл $|x|\geq 0$)

1сл $x\geq 0$

$|x|=x$

$y=\dfrac{2,5x-1}{x-2,5x^2}$

$y=-\dfrac{1-2,5x}{x(1-2,5x)}$

$y=-\dfrac{1}{x}$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	2	0,4
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2,5

2сл $x<0$

$|x|=-x$

$y=\dfrac{-2,5x-1}{-x-2,5x^2}$

$y=\dfrac{-(2,5x+1)}{-x(1+2,5x)}$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	~~0~~	$-0,4$
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		$-2,5$

при $x\geq 0$

$x-2,5x^2\neq 0$

$x(1-2,5x)\neq 0$

$x\neq 0$ или $1-2,5x\neq 0$

$2,5x\neq 1$

$x\neq \dfrac{1}{2,5}$

$x\neq 0,4$

при $x<0$

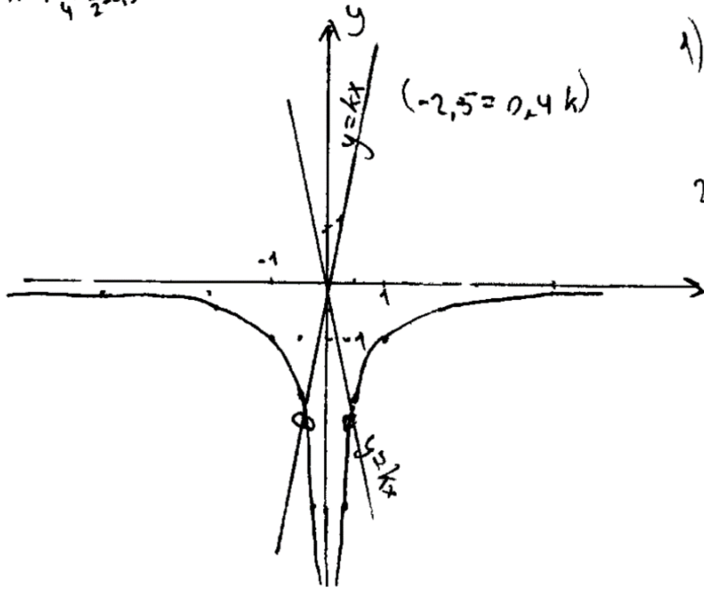
$-x-2,5x^2\neq 0$

$-x(\cancel{x}\ 1+2,5x)\neq 0$

$x\neq 0$ или $\cancel{x}$

$2,5x\neq -1$

$x\neq -0,4$



$-2,5=0,4k$

1) $k=\dfrac{-2,5}{0,4}$ $\cancel{/10}$

$k=-6,25$

2) $-2,5=-0,4k$

$k=\dfrac{-2,5}{-0,4}$

$k=6,25$

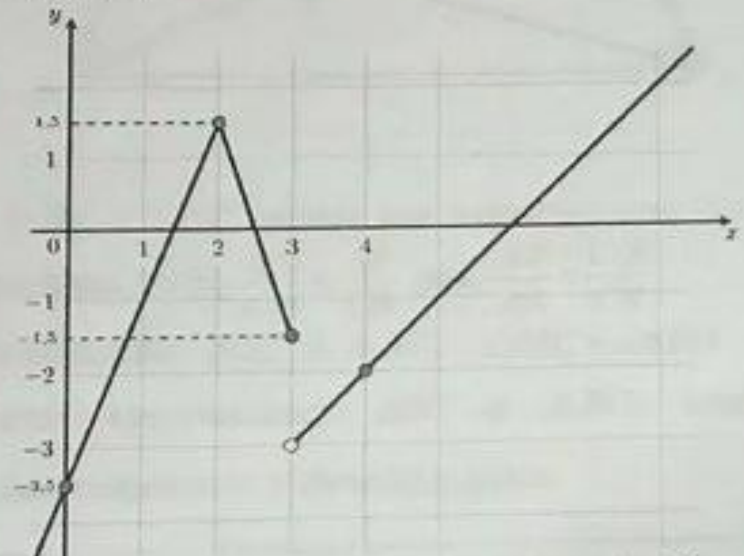
Ответ: 6,25; -6,25

График построен верно, не все значения параметра найдены, (к=0)
1 балл

Постройте график функции $y=\begin{cases}2{,}5x-3{,}5 & x<2\\ -3x+7{,}5 & 2\le x\le 3\\ x-6 & x>3\end{cases}$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.
Заметим, что функция определена при всех x и состоит из отрезка и двух лучей. Построим график.



При $x=3$ график исходной функции терпит разрыв, (3; -3) — выколотая точка, (3;-1,5) — закрашенная точка, (2;1,5) — точка стыка.
Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки при $-3<m<-1{,}5$ или при $m=1{,}5$.
Ответ: $-3<m<-1{,}5$; $m=1{,}5$.