# Педагогическая мастерская

«Эффективные методы подготовки к ГИА по математике»

«Математик — это

человек, который

не только сразу же

схватывает чужую мысль,

но также видит,

из какой логической ошибки

она вытекает»

(Хельмут Нар)

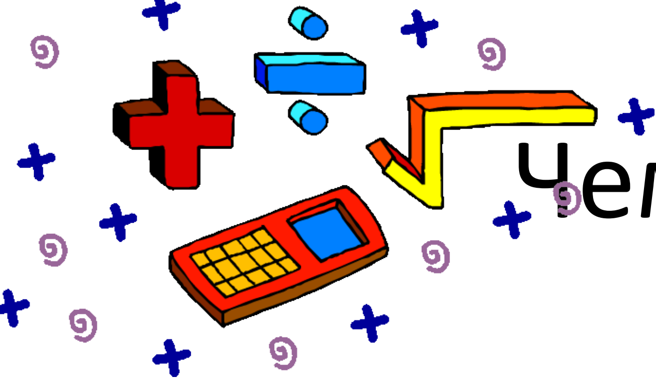
Эта форма символизирует лидерство.
Треугольники - энергичные,
сильные личности.

Круг - самая доброжелательная из пяти фигур.
Он обладает высокой способностью сопереживать,
сочувствовать.

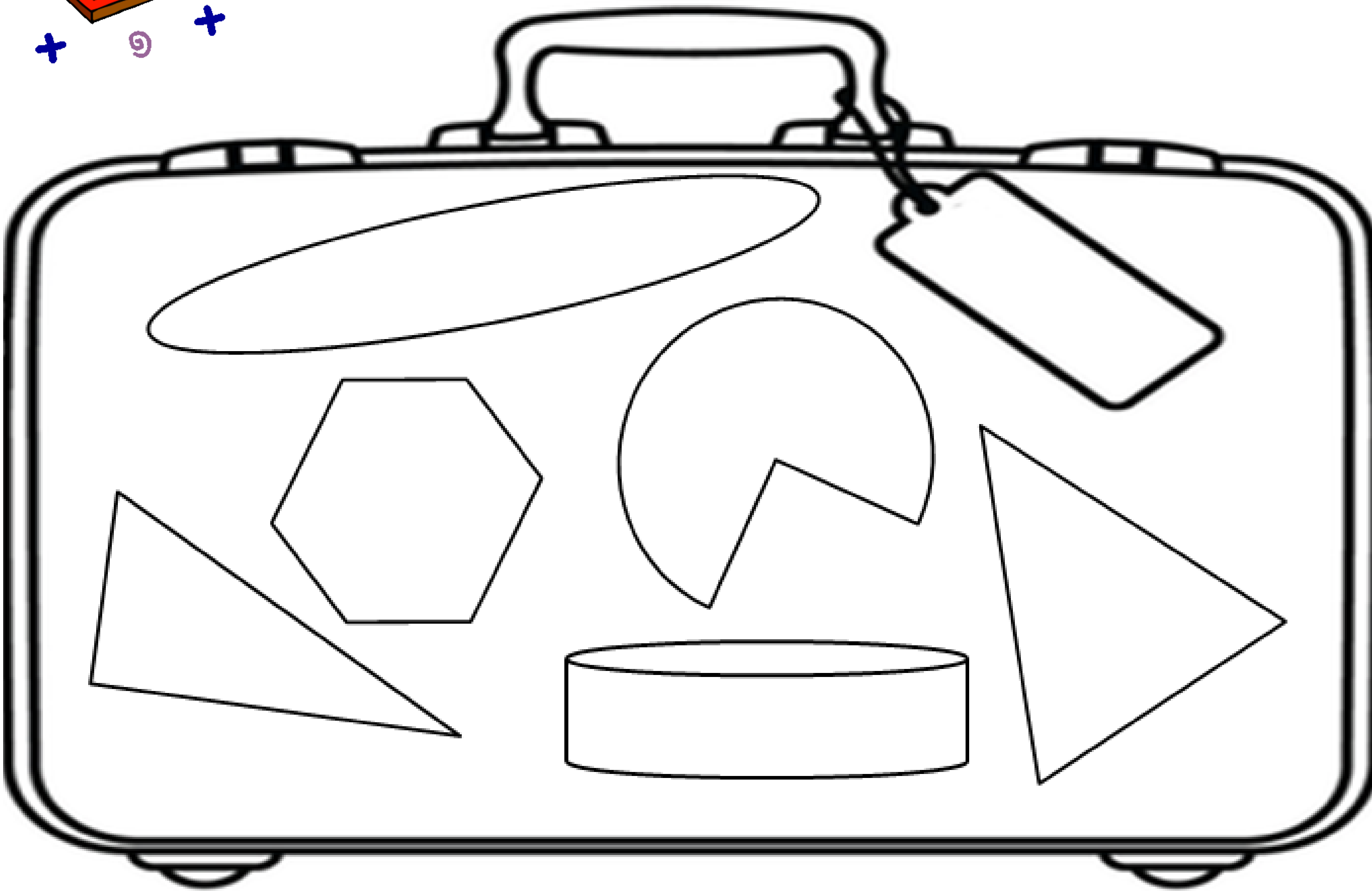
Идеал Квадрата - распланированная,
предсказуемая жизнь, ему не по душе
«сюрпризы» и изменения привычного хода событий.

Ведущие качества
прямоугольника-
любознательность,
пытливость, живой интерес ко
всему происходящему и
смелость.

Фигура, символизирующая творчество.
Неутомимые проповедники своих идей
и способны увлечь многих.



# Чемоданчик идей



цвет эмоциональности, стремления к власти, престижа и авторитета

цвет активности, жизнедеятельности, энтузиазма и вдохновения

цвет уверенности, жизненной энергии и стремления к высотам

цвет стабильности, духовного развития, творчество и красоты

Задание №13 2024 год. Решите уравнение: *а)* $\cos 2x + \sqrt{2}\cos(x+\pi) = 0$; *б)* Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

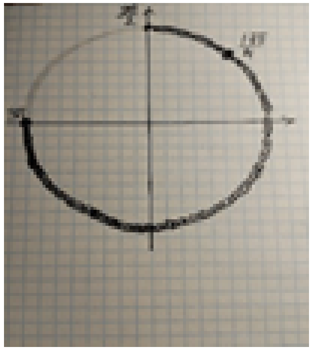
Решение: *а)* Запишем исходное уравнение в виде: $2\sin x\cos x + \sqrt{2}\cos(-x) = 0$;

$2\sin x\cos x - \sqrt{2}\cos x = 0$; $\cos x\cdot(2\sin x - \sqrt{2}) = 0$;

$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$; или

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$.

*б)* С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$:



Получим числа: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

Ответ : *а)* $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k\epsilon Z$

*б)* $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$

13. Решите уравнение: *а)* $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4cos^2 x = \sqrt{3} - 4$;

*б)*Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

а) $2\sin x + 2\sqrt{3}\sin(-x) - 4\cos^2 x = \sqrt{3} - 4$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x - 4\cdot(1 - \sin^2 x) - \sqrt{3} + 4 = 0$

$2\sin x - 2\sqrt{3}\sin x \cancel{-4} + 4\sin^2 x - \sqrt{3} \cancel{+4} = 0$

$2\sin x\cdot(1 + 2\sin x) - \sqrt{3}\cdot(2\sin x + 1) = 0$

$(2\sin x + 1)\cdot(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

$2\sin x + 1 = 0$ или $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

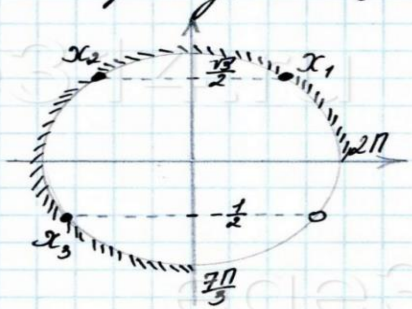
$2\sin x = -1$ $\qquad$ $2\sin x = \sqrt{3}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\in Z$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\in Z$ $\qquad$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l\in Z$

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.




$x_1 = 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{6\pi + \pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

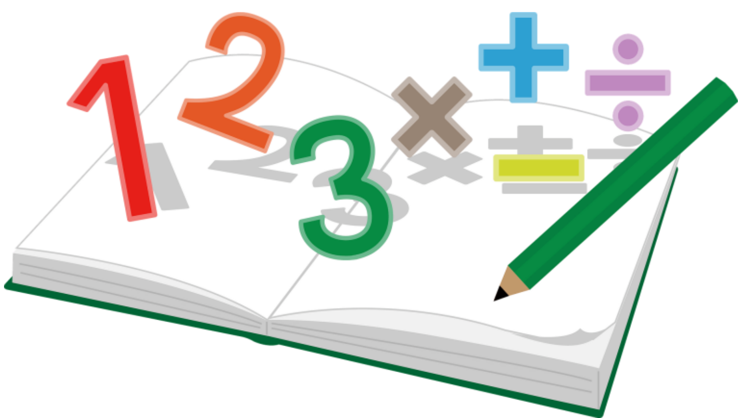
$x_2 = 2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$x_3 = 3\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{18\pi + \pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$

| | |
|---|---|
| Ответ: | а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n\in Z$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m\in Z$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi l, l\in Z$; <br> б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{19\pi}{6}$. |

# Критерии оценивания 13 задания ЕГЭ

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |



# Ключевые моменты при выполнении 13 задания:

Преобразование уравнения к стандартному виду;

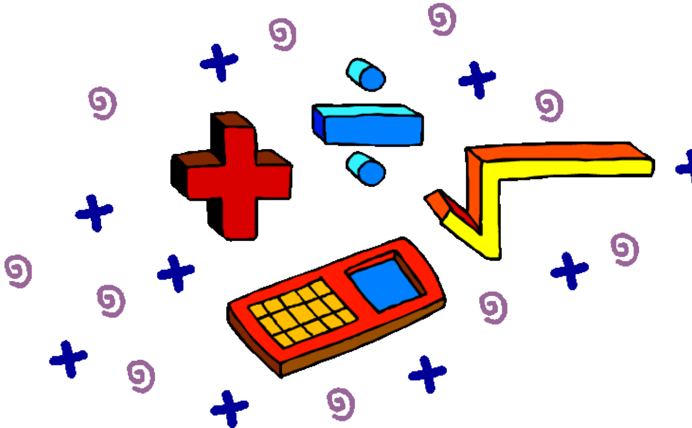
Использование основных тригонометрических тождеств;

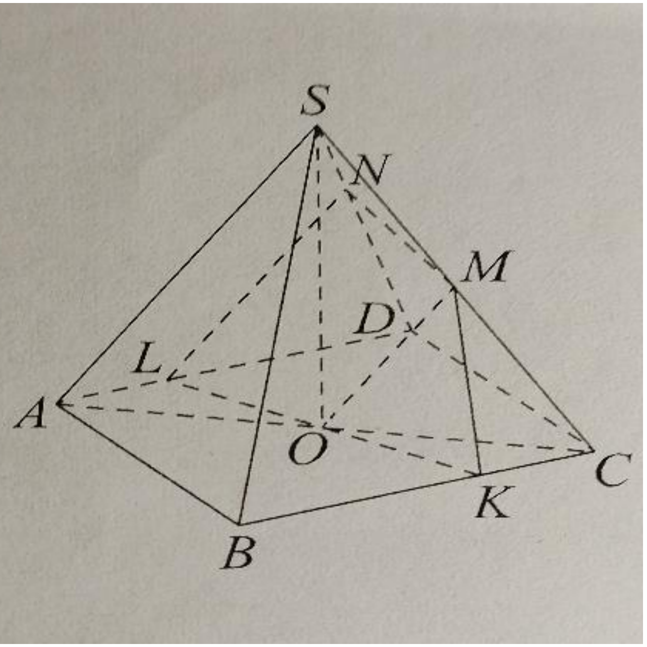
Проверка решения на соответствие заданному промежутку;

Грамотное оформление и аккуратные вычисления играют важную роль;

Ошибка в интервалах или потеря корней могут снизить баллы;

Ответ записывать только в радианах.






**Задание 14. 2024 год.**

Решение (по критериям):

*а)*Плоскости OMN и SAC пересекаются по прямой OM, параллельной прямой SA, т. к. прямая SA параллельна плоскости OMN. Точка O является серединой стороны AC треугольника ASC. Следовательно, отрезок OM является средней линией этого треугольника, а значит, точка M – середина отрезка SC.

*б)*обозначим точки пересечения плоскости OMN с рёбрами AD и BC через L и K соответственно. Прямые SA и NL, содержащиеся в плоскости SAD, параллельны, т.к. плоскость OMN, содержащая прямую NL, параллельна прямой SA. Следовательно, треугольники SDA и NDL подобны с коэффициентом подобия $\frac{ND}{SD} = \frac{3}{4}$. Значит, LD = $\frac{3}{4}AD = 3$. Треугольники AOL и COK равны, потому что ∠LAO =∠ KCO.∠ AOL= ∠COK и AO=CO. Следовательно, CK=AL=AD – LD=1. Треугольник SBC равносторонний, поэтому ∠SCB=$60^0$. Значит, MK = $\sqrt{CM^2 + CK^2 - 2CM \cdot CK \cdot cos\angle MCK} = \sqrt{3}$.

Ответ: *б)* $\sqrt{3}$.

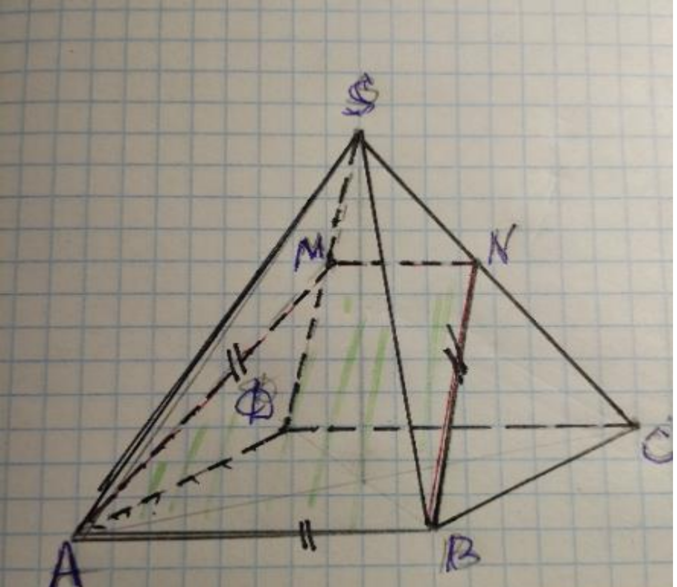


Рис. а)

**Задание 14. 2025 год.**

Решение:

а) Основанием правильной четырехугольной пирамиды является квадрат, значит, ребра $AB$ и $DC$ параллельны, а потому и плоскость α параллельна ребру $DC$. Следовательно, лежащая в плоскости α прямая $MN$ также параллельна ребру $DC$. Тогда треугольники $SNM$ и $SDC$ подобны по двум углам с коэффициентом $\frac{1}{5}$. Таким образом, $SM : SD = 1 : 5$, а потому $SM : MC = 1 : 4$. Поскольку боковые ребра правильной пирамиды равны, $SN : NC = 1 : 4$.

**Задание 14. 2025 год.**

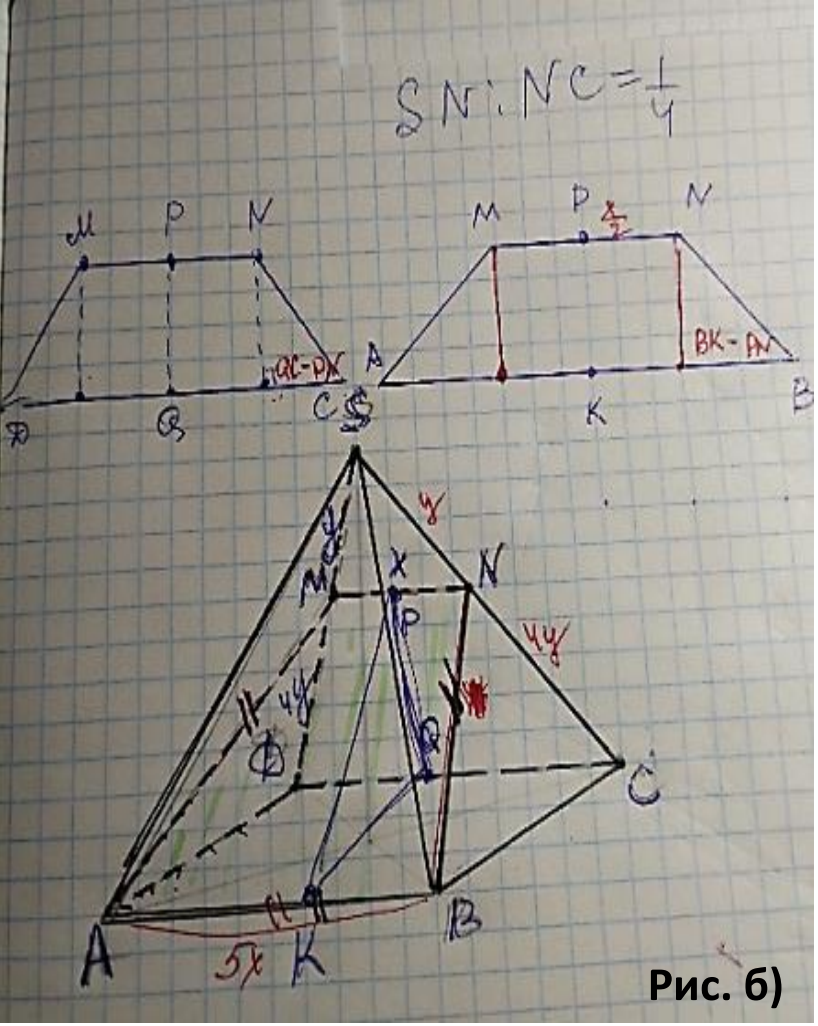


Рис. б)

б) Пусть $MN = x$ и $SM = y$, тогда $MD = 4y$ и $AB = AN = BM = 5x$, и пусть точки $K$, $P$ и $Q$ — середины отрезков $AB$, $MN$ и $DC$ соответственно.

Рассм. прям. треугольник, $PK$ - *катет*, а гипотенуза $BN$. Тогда второй катет такого треугольника будет равен $BK - NP$. Аналогично прям. треугольник с катетами $PQ$, $QC - PN$ и гипотенузой $NC$. По теореме Пифагора:

$PK^2 = BN^2 - (BK - PN)^2 = 21x^2$, $PQ^2 = NC^2 - (QC - PN)^2 = 16y^2 - 4x^2$.

Косинус искомого угла = $\cos\angle PKQ$.

По теореме косинусов в треугольнике $PKQ$:

$\cos\angle PKQ = \frac{PK^2+QK^2-PQ^2}{2PK\cdot KQ} = \frac{50x^2-16y^2}{10\sqrt{21}x^2}$.

В равнобедренном треугольнике $SBC$ найдем косинус угла $SCB$: $\cos\angle SCB = \frac{25x^2+25y^2-25y^2}{2\cdot 5x\cdot 5e} = \frac{x}{2y}$.

Косинус этого же угла выразим из треугольника $NBC$: $\cos\angle SBC = \frac{2y}{5x}$.

Приравняем полученные значения: $\frac{x}{2u} = \frac{2y}{5x}$, отсюда следует, что $x^2 = 0{,}8y^2$.

Наконец, подставим в выражение для косинуса искомого угла: $\cos\angle PKQ = \frac{PK^2+QK^2-PQ^2}{2PK\cdot KQ} = \frac{50x^2-16y^2}{10\sqrt{21}x^2} = \frac{40y^2-16y^2}{\sqrt{21}\cdot 8y^2} = \frac{\sqrt{21}}{7}$

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$

# Критерии оценивания 14 задания ЕГЭ

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, но при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| *Максимальный бал* | 3 |

# Ключевые моменты при выполнении 14 задания:

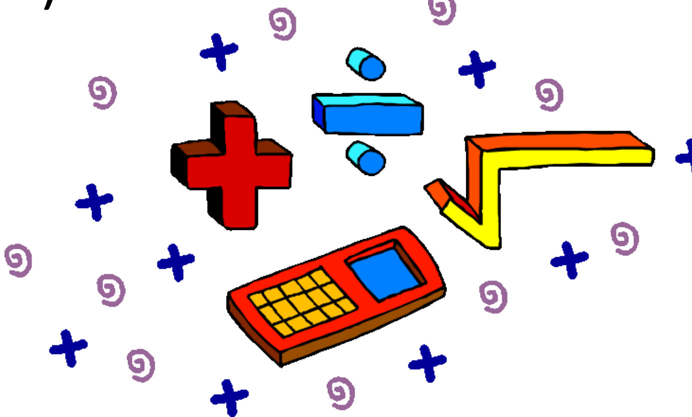
Построение чертежа и схем для наглядности;

На схеме определение ключевых элементов задачи (высоты, диагонали, углы и т.д.);

Последовательное обоснование вычислений;

Для получения полного балла важно строго соблюдать критерии оформления и приводить подробные доказательства;

Основной ошибкой, из-за которых не было полного балла было то, что не доказывая *а)* выполняли вычисления б) без обоснования.



Задание №15. 2024 год

Решите неравенство: $11^{x}-6-\frac{24\cdot 11^{x}-244}{121^{x}-16\cdot 11^{x}+60}\leq\frac{1}{11^{x}-10}$.

**Решение.**

Пусть $t=11^{x}$, тогда неравенство примет вид: $t>0$.

$$t-6-\frac{24t-244}{t^{2}-16t+60}\leq\frac{1}{t-10};\ t-6-\frac{24t-244}{(t-6)(t-10)}-\frac{t-6}{(t-6)(t-10)}\leq 0;$$

$$t-6-\frac{25}{t-6}\leq 0,\text{ где } t\neq 10;\ \frac{(t-1)(t-11)}{t-6}\leq 0,\text{ где } t\neq 10,$$

откуда $t\leq 1$; $6<t<10$; $10<t\leq 11$.

При $t\leq 1$ получим: $11^{x}\leq 1$, откуда $x\leq 0$.

При $6<t<10$ получим: $6<11^{x}<10$, откуда $\log_{11}6<x<\log_{11}10$.

При $10<t\leq 11$ получим: $10<11^{x}\leq 11$, откуда $\log_{11}10<x\leq 1$.

Решение исходного неравенства:

$$x\leq 0;\ \log_{11}6<x<\log_{11}10;\ \log_{11}10<x\leq 1.$$

**Ответ:** $(-\infty;0]$; $(\log_{11}6;\log_{11}10)$; $(\log_{11}10;1]$.

# Задание №15.    2025 год

Решите неравенство: $\frac{9\cdot 27^{x}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+3}-9}{50x^{2}-90x+40{,}5}\geq 0$

1). Разложим числитель и знаменатель на множители: числитель — $3^x=t;\ t>0$

* $9\cdot 27^x-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+3}-9=$

$=9\cdot t^3-3\cdot 9\cdot t^2+27\cdot t-9=$

$=9\cdot t^3-27t^2+27t-9=9\cdot(t-1)^3$, обр. замен и нули $9\cdot(3^x-1)^3=0$, $x=0$.

** знаменатель $50x^2-90x+40{,}5=$

$=100x^2-180x+81=(10x-9)^2$.

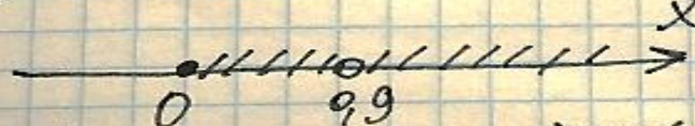
неравенство преобразовали:

$$\frac{9\cdot(3^x-1)^3}{(10x-9)^2}\geq 0.\Leftrightarrow\begin{cases}9\cdot(3^x-1)^3\geq 0\\(10x-9)^2>0.\end{cases}$$

Заметим, что знаменатель, являясь квадратом, — положителен, $x\neq 0{,}9$.

$3^x\geq 1$

$x\geq 0$




Ответ $x\in[0;0{,}9)\cup(0{,}9;\infty)$.

# Критерии оценивания 15 задания ЕГЭ

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 1. | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

В первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: « $<$ » вместо « $\le$ » или наоборот. Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».

Задание 16.      2024 год

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и общая сумма платежей составит 311 040 рублей?

**Решение.**

Пусть сумма кредита составляет $S$ рублей, а ежегодные выплаты $X=\frac{311\,040}{4}=77\,760$ рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S,\ \frac{6}{5}\cdot S-X,\ \left(\frac{6}{5}\right)^2 S-\frac{6}{5}\cdot X-X,\ \left(\frac{6}{5}\right)^3 S-\left(\frac{6}{5}\right)^2 X-\frac{6}{5}\cdot X-X,$$

$$\left(\frac{6}{5}\right)^4 S-\left(\frac{6}{5}\right)^3 X-\left(\frac{6}{5}\right)^2 X-\frac{6}{5}\cdot X-X=0,$$

откуда

$$S=\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^4-1}{\left(\frac{6}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{6}{5}-1\right)}\cdot X=\frac{3355}{1296}\cdot 77\,760=201\,300.$$

Получаем: $S=201\,300$ рублей.

**Ответ:** 201 300.

Задание 16. 2025 год. Составим график погашения кредита:

| Номер месяца | Долг | Часть платежа в уплату долга | Проценты |
|---|---|---|---|
| 1 | $A$ | $\frac{A}{48}$ | $0{,}01A$ |
| 2 | $\frac{47}{48}\cdot A$ | $\frac{A}{48}$ | $0{,}01\cdot\frac{47}{48}\cdot A$ |
| ... | ... | ... | ... |
| 37 | $\frac{12}{48}A$ | $\frac{A}{48}$ | $0{,}01\cdot\frac{12}{48}\cdot A$ |
| 38 | $\frac{11}{48}A$ | $\frac{A}{48}$ | $0{,}01\cdot\frac{11}{48}\cdot A$ |
| ... | ... | ... | ... |
| 48 | $\frac{1}{48}A$ | $\frac{A}{48}$ | $0{,}01\cdot\frac{1}{48}\cdot A$ |

Общая сумма платежей в 2030 году равна сумме платежей с 37 по 48 месяцы и составляет 6390 тыс. руб., или 6,39 млн руб.

Имеем: $12\cdot\frac{A}{48}+0{,}01\cdot\frac{12}{48}\cdot A+0{,}01\cdot\frac{11}{48}\cdot A+\ldots+0{,}01\cdot\frac{1}{48}\cdot A=6{,}3$

$\frac{1}{4}\cdot A+0{,}01\cdot A\left(\frac{12}{48}+\frac{11}{48}+\cdots+\frac{1}{48}\right)=6{,}39,\quad \frac{1}{4}\cdot A+0{,}01\cdot A\cdot 1{,}625=6{,}39,$

0,26625A=6,39

A=24

Таким образом, планируется взять кредит на сумму 24 млн руб.

# Критерии оценивания 16 задания ЕГЭ

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

**1 балл** в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п.

Известно, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жёсткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

Ошибка происходила в том, что в условии задачи не обращали внимание на сроки выплаты и вся математическая модель строилась к другой задаче, и решалась другая задача.

# Педагогическая мастерская

«Эффективные методы подготовки
к ГИА по математике»