«Применение свойств функции в решении задач первой и второй части ЕГЭ по математике»

Степуренко Людмила Геннадьевна

учитель математики

МАОУ СОШ№16 г. Екатеринбург

Свойства функций

1. Область определения.
2. Множество значений.
3. Периодичность
4. Монотонность.
5. Чётность.
6. Ограниченность.
7. Промежутки знакопостоянства
8. Наибольшее и наименьшее значения функции.
9. Непрерывность.
10. Экстремумы функции

Одной из ключевых составляющих успешной сдачи ЕГЭ по математике является умение применять свойства функций при решении задач. Понимание свойств функций помогает не только эффективно решать стандартизированные уравнения и неравенства, но и правильно интерпретировать полученные результаты и глубже осознавать геометрический смысл условий задачи.

Основные виды задач

Типы задач, которые включают работу с функциями, охватывают широкий спектр ситуаций, включая:

- **Анализ поведения функций**: определение области определения, области значений, точек экстремума, интервалов монотонности и симметричности.
- **Решение уравнений и неравенств**: путем использования свойств функций (монотонность, ограниченность, чётность/нечётность).
- **Работа с графиками функций**: построение графиков и интерпретация их особенностей.
- **Задачи с параметрами**: анализ влияния параметра на поведение функции и количество решений.

Методы решения задач с применением свойств функций

1. **Методом мажорант (оценок)**:
   Применяется, когда одна сторона уравнения (например, левая) принимает одно значение, а другая – другое. Суть метода заключается в установлении минимального и максимального значений функций и определении возможности пересечения этих значений.
2. **Метод оценки области значений**:
   Часто используется при решении неравенств, где функция должна удовлетворять условиям на определенных участках. Определение возможных значений функций позволяет сужать область поиска решений.
3. **Использование методов ограниченной функции**:
   Некоторые функции обладают ограниченными диапазонами значений, что позволяет заранее ограничить возможные решения.
4. **Применение четности и периодичности**:
   Эти свойства помогают сократить объем необходимых расчетов и упростить процесс решения задач.
5. **Интервал монотонности**:
   Монотонные функции позволяют однозначно определять наличие решений уравнений, поскольку каждая точка графика соответствует одному значению аргумента.

Задание 11
Функции и их графики.

Как формулируется задание 11 ЕГЭ по математике?
По графику функции, который дается в условии, нужно определить неизвестные параметры в ее формуле. Возможно — найти значение функции в некоторой точке или координаты точки пересечения графиков функций.

Чтобы выполнить это задание, надо знать, как выглядят и какими свойствами обладают графики элементарных функций. Надо уметь читать графики, то есть получать из них необходимую информацию. Например, определять формулу функции по ее графику.

Способы решения:

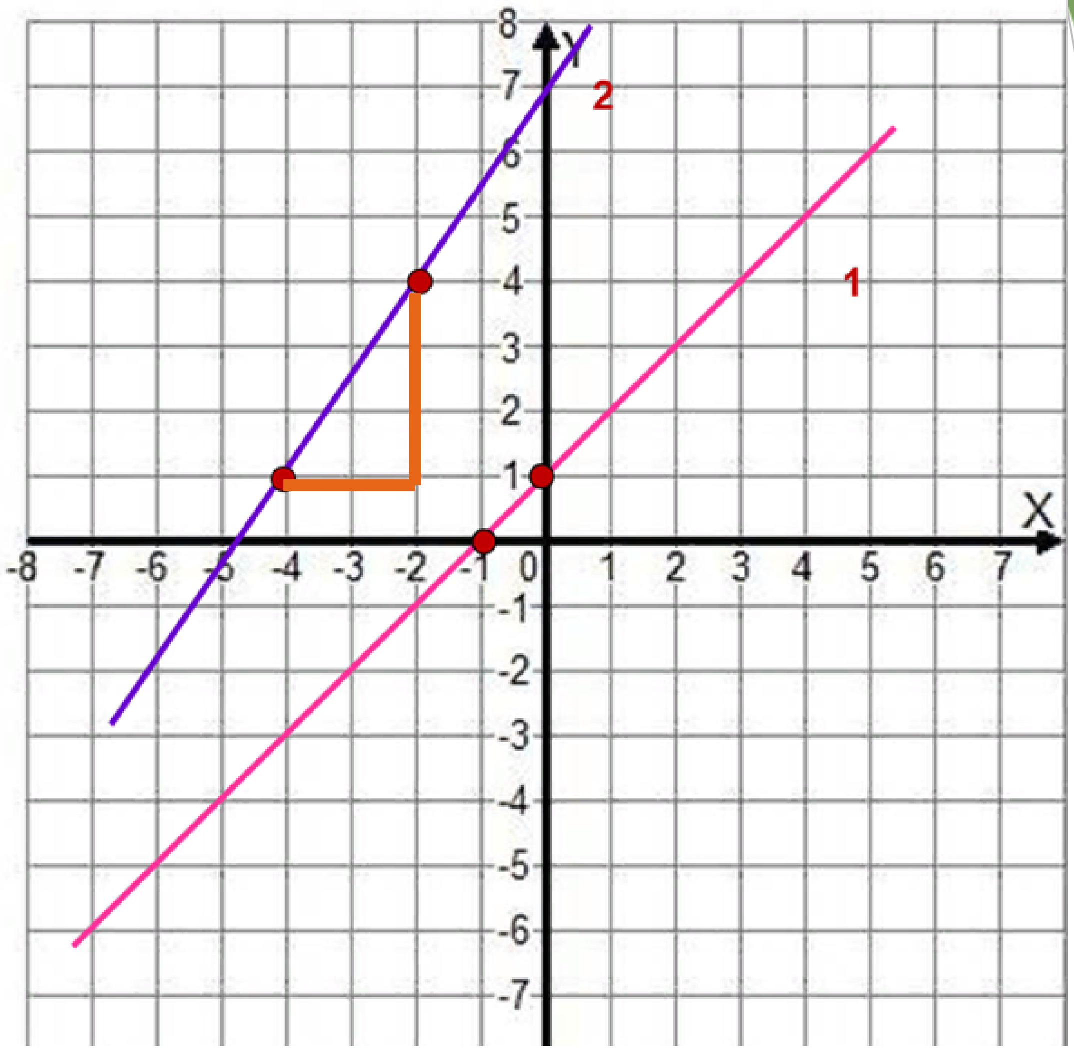
1. Нахождение коэффициентов функции через решение систем уравнений, используя целочисленные координаты точек графика (в том числе и точек пересечения с осями).
2. Нахождение коэффициентов, используя вспомогательные формулы. Например, формулу тангенса угла наклона прямой, абсциссы вершины параболы, периодичности функции и др.)
3. Преобразование формулы, задающую функцию.
4. Нахождение коэффициентов через преобразования графиков функций.

Прямая (1)
y= x + 1

Прямая (2)
К= 3 : 2 = 1,5
В = 7
 y = 1,5x + 7

x + 1= 1,5x + 7
-0,5x=6
X=-12

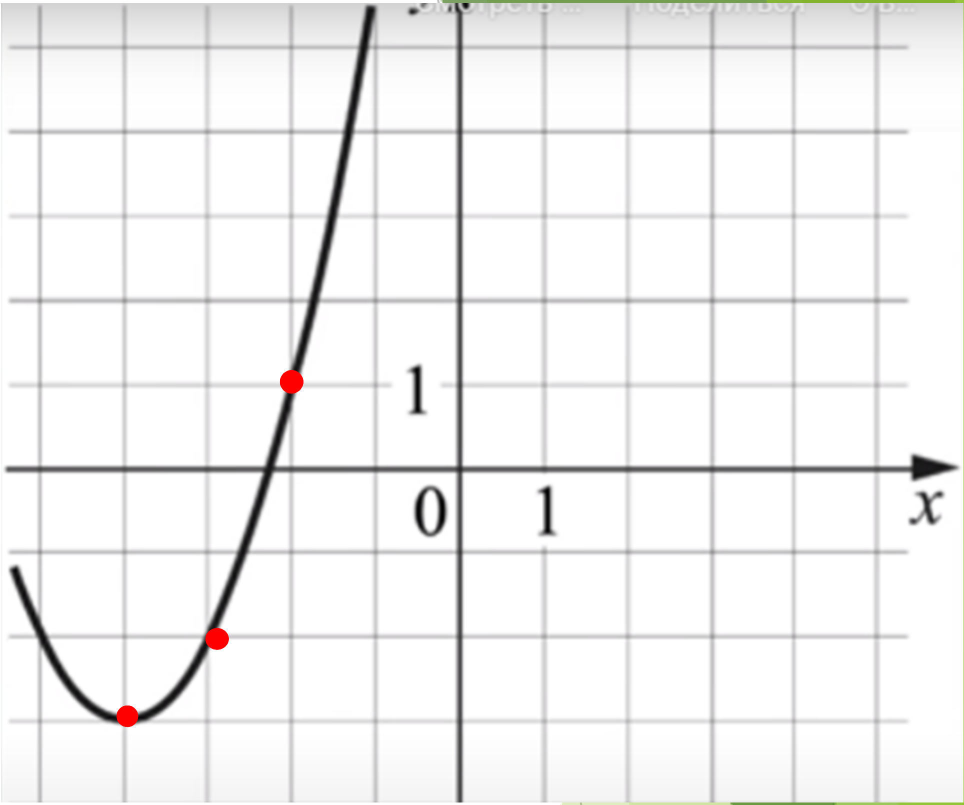
Ответ: x=-12



Пример

Найти значение функции f(- 12), если f(x)=ax^2 + bx + c.

1 способ



Коэффициент а = 1, $X_в = -\frac{в}{2a}$ = - 4, в = 8, тогда

достаточно одного уравнения для А(- 4; - 3)

16а – 4в + с =-3; 16 – 32 + с = - 3; с = 13

Имеем f(x)=x^2 + 8x + 13, т.е. по условию

f(- 12) = 144 – 96 + 13 = 61

Ответ: х=61

2 способ, a=1,

координаты вершины параболы A(- 4; - 3).

$f(x)= (x+4)^2 – 3$

по условию

$f(- 12) = (-12 + 4)^2 – 3 = 64 – 3 = 61$

Ответ: x=61

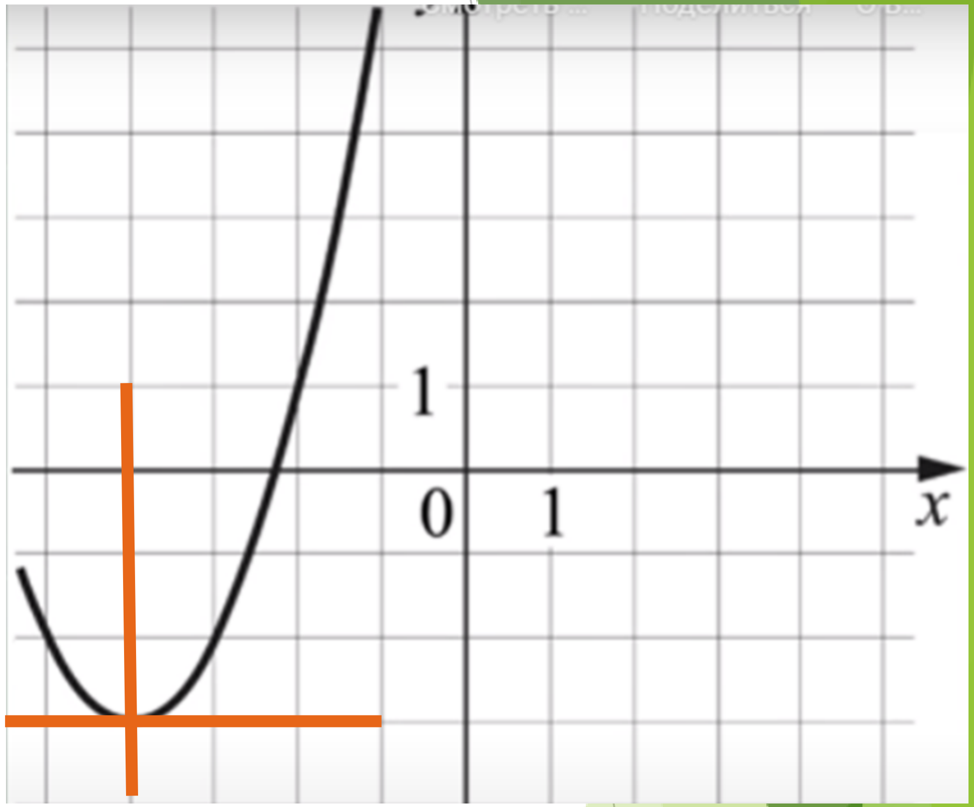
3 способ (без формул)

Относительно новой системы координат функция примет вид $f(x) = x^2$

Но тогда в новой системе координат нам необходимо найти f(- 8).

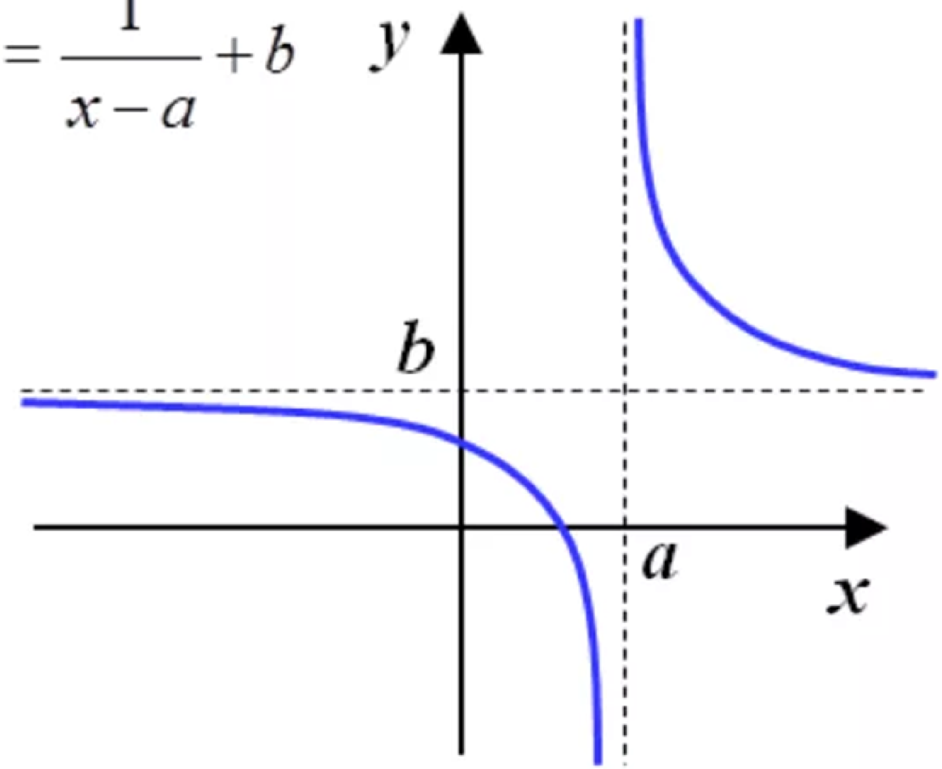
$f(- 8)= 64$,

а в первоначальной системе координат будем иметь на 3 меньше, т.е. 64 – 3 = 61.



Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график

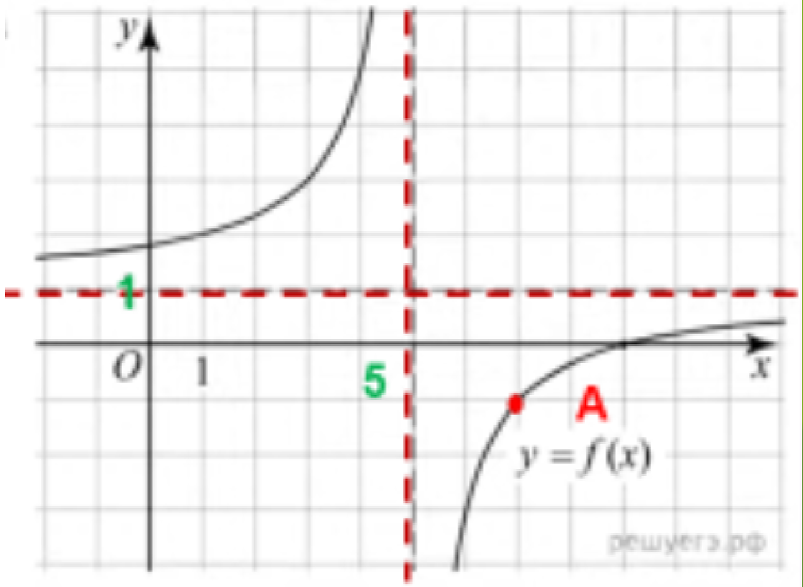
$$y = \frac{1}{x-a} + b$$



Асимптоты

$$y = b \quad x = a$$

На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{a}{x+b}+c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(10)$.



Асимптоты $x = 5$, $y = 1$

Т.е . $b = -5$, $c = 1$

В новой системе координат функция имеет вид $y = \dfrac{a}{x}$

Определим а

A(2; - 2) – координаты точки в новой системе координат

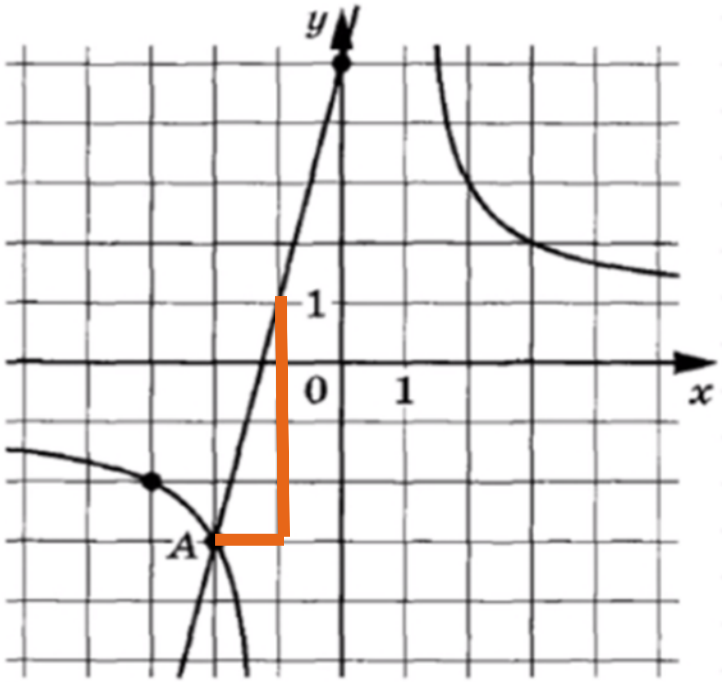
$a = -4$

$f(x) = -\dfrac{4}{x-5} + 1$

$f(10) = 0{,}2$

На рисунке изображены графики функций $f(x)=\frac{k}{x}$ и $g(x)=ax+b$, которые пересекаются в точках $A(-2;\,3)$ и $B(x_0;\,y_0)$. Найдите x_0.

Ответ:__________________.



g(x) = ax + b

a = 4, b = 5

g(x) = 4x + 5

k/(-2) = - 3

k = 6

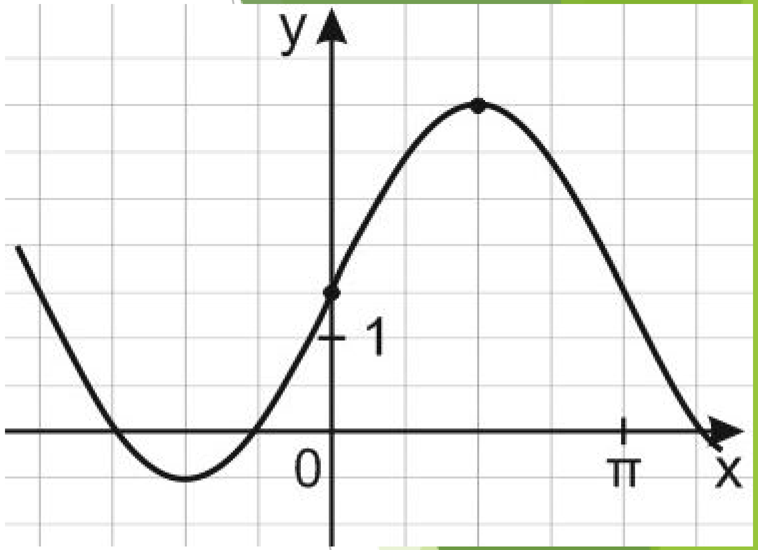
f(x) = 6/x

6/x = 4x + 5

$4x^2 + 5x - 6 = 0$

Найдем корни уравнения x= - 2, x = 0,75

На рисунке изображён график функции f(x)=asin x+b. Найдите b.



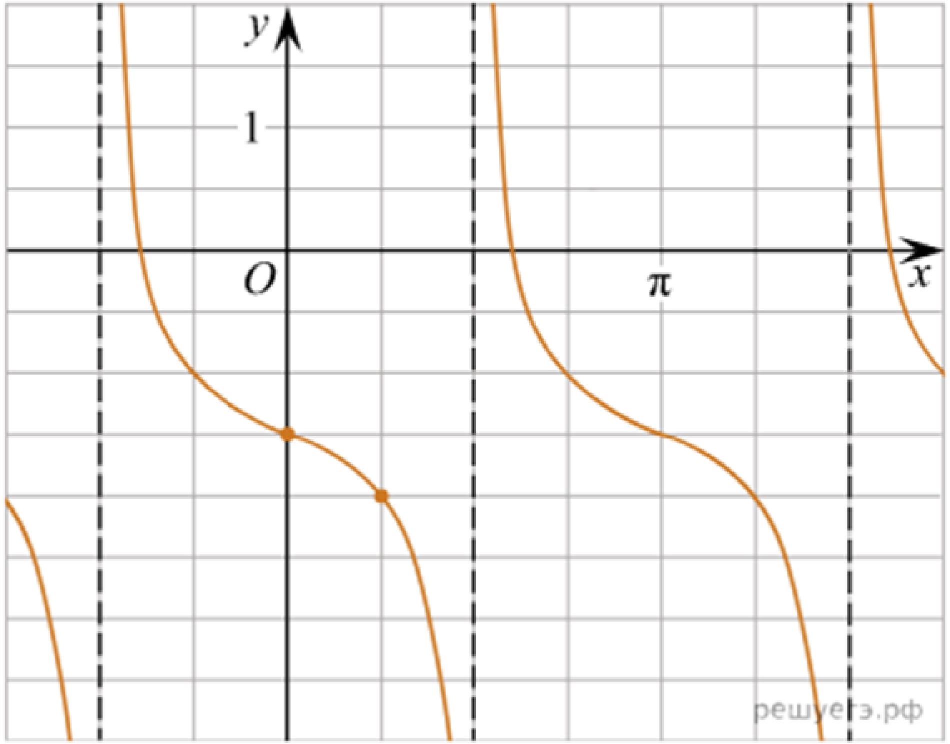
Решение:

График функции y=asin x+b сдвинут на 1,5 вверх; f(0)=1,5. Значит, b=1,5. Амплитуда a=2 (наибольшее отклонение от среднего значения).

Это график функции f(x)=2sin x+1,5. Он получен из графика функции y=sin x растяжением в 2 раза по вертикали и сдвигом вверх на 1,5.

Ответ: b=1,5.

5. На рисунке изображён график функции $f(x) = a\operatorname{tg}x + b$. Найдите b.

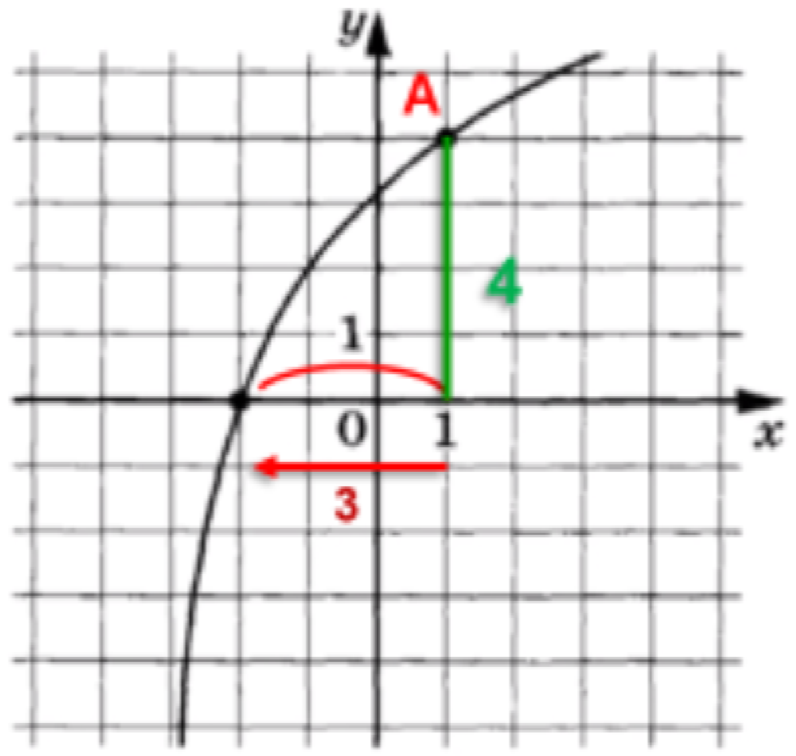


Решение:

По рисунку определяем, что график получен путем смещения графика функции $f(x) = a\,tgx$ на 1,5 единицы вниз. Значит, $b = -1{,}5$.

Ответ: −1,5.

На рисунке изображён график функции $f(x) = \log_a(x+b)$. Найдите $f(13)$.



b = 3

$\log_a(1+3) = 4$, так как A(1; 4)

$\log_a 4 = 4$

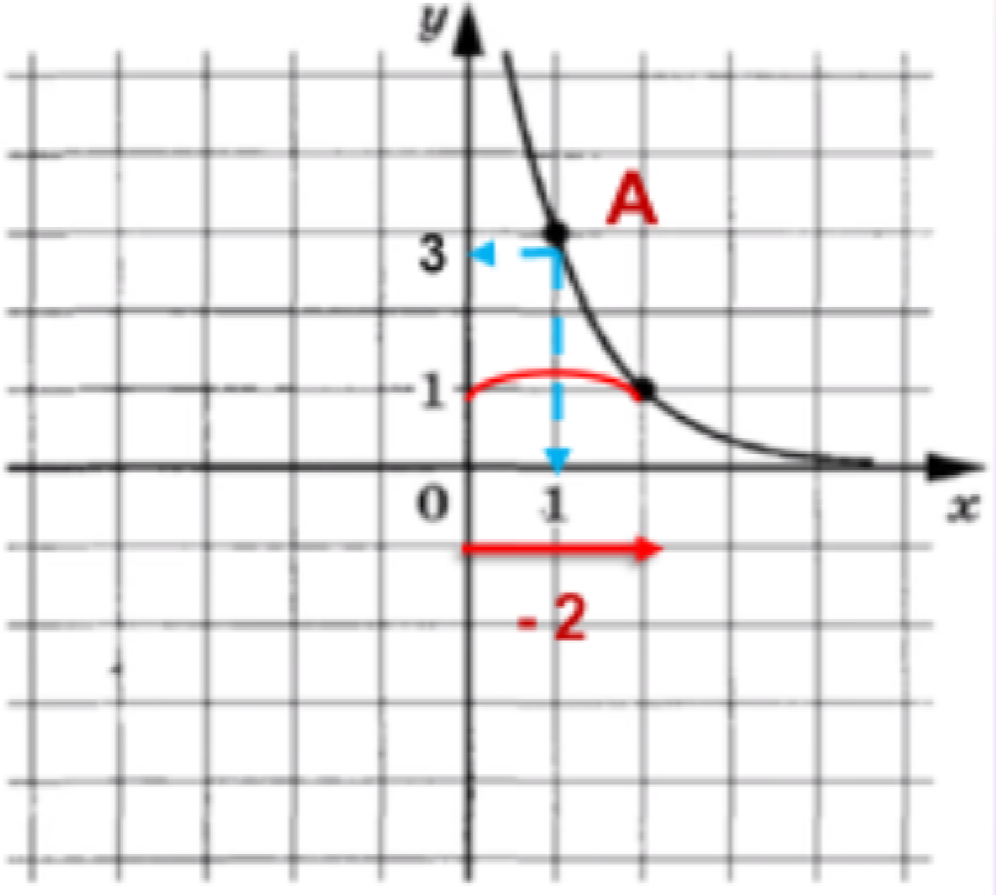
$a^4 = 4$

a=$\sqrt{2}$

f(x)=$\log_{\sqrt{2}}(x+3)$

f(13) = $\log_{\sqrt{2}}$(13+3) = 8

На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+b}$. Найдите $f(-1)$.



По графику определим b: b = - 2

По графику определим координаты точки A : A(1;3)

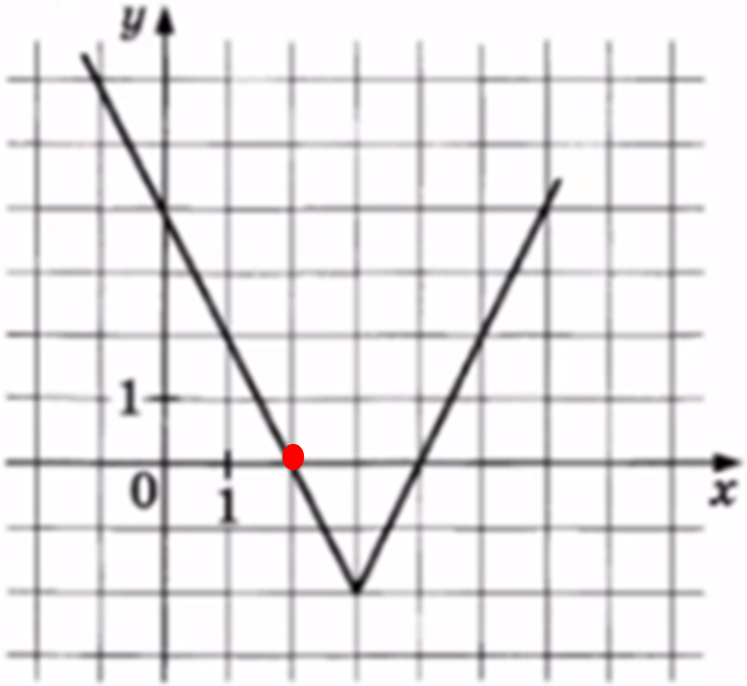
$a^{1-2}=3 \qquad a^{-1}=3 \qquad a=\frac{1}{3}$

$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

$f(-1)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-1-2}=27$

Кусочно-линейная функция, ее график

На рисунке изображен график функции f(x)=|kx+b|+c, где числа k, b и c – целые, k>0. Найдите f(- 15,7).



Можно рассмотреть функцию в виде f(x)=a|x+n|+c,
Но тогда по графику n= - 3 c= - 2
f(x) = a|x – 3| - 2
Определим координаты точки А: А(2;0)
0 = a|2 – 3| - 2
a = 2
f(x) = 2|x – 3| - 2
f(-15,7) = 2|-15,7 – 3| - 2 = 35,4

12 методов решения задач с параметрами:

1) Графический способ.
2) Геометрический способ.
3) Метод областей.
4) Применение условий касания.
5) Использование четности функций, входящих в уравнение.
6) Симметрия уравнений и ее применение.
7) Метод оценки.
8) Аналитический способ.
9) Способы решения квадратных уравнений и неравенств с параметрами.
10) Способы решения тригонометрических уравнений с параметрами.
11) Использование свойств функций: непрерывность, монотонность, нечетность.
12) Метод упрощающего значения.

Найдите все значения a, при которых уравнение $\sqrt{a-2xy}=y-x+7$ имеет единственное решение.

Решение:

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} a-2xy=(y-x+7)^2, \\ y-x+7\geq 0. \end{cases}$$

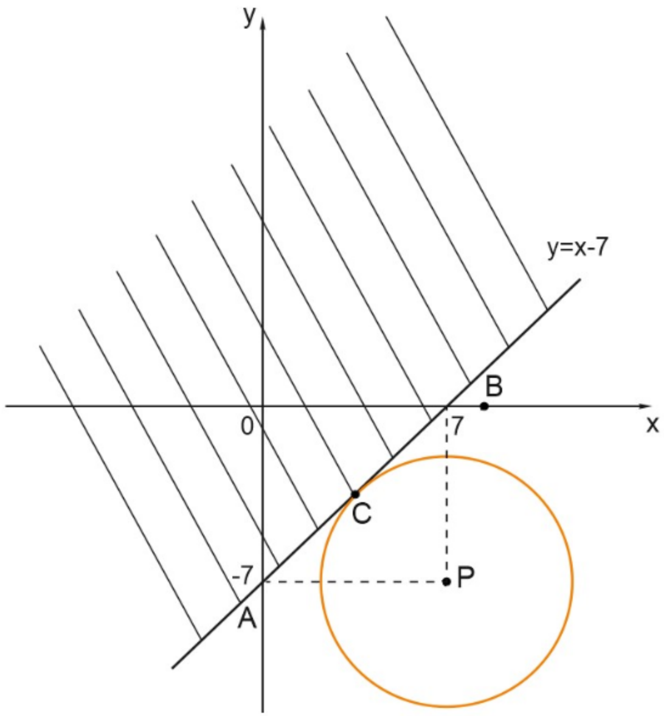
Заметим, что при прибавлении к правой и левой части числа 49 можно выделить полные квадраты:

$$\begin{cases} a+49=x^2-14x+49+y^2+14y+49, \\ y\geq x-7; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-7)^2+(y+7)^2=a+49, \\ y\geq x-7. \end{cases}$$

Решим систему графически.

Уравнение $(x-7)^2+(y+7)^2=a+49$ задает окружность с центром в точке $P(7;-7)$, где радиус $R=\sqrt{a+49}$.

Неравенство $y\geq x-7$ задает полуплоскость, которая расположена выше прямой $y=x-7$, вместе с самой этой прямой.



Рассмотрим треугольник ABP. Он прямоугольный, и радиус окружности PC является медианой этого треугольника. Значит $PC=\dfrac{AB}{2}$ по свойству медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотену:

Из треугольника ABP найдем длину гипотенузы AB по теореме Пифагора.

$AB=\sqrt{AP^2+BP^2}$;

$AB=\sqrt{7^2+7^2}=\sqrt{98}=7\sqrt{2}$. Тогда

$PC=\dfrac{AB}{2}$;

$\sqrt{a+49}=\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Решая это уравнение, получаем, что $a=-24,5$.

Ответ: $a=-24,5$.

При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2\left(x^4y^2 + 2a^2\right) = \log_2\left(1 - ax^2y^2\right) + 1 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

Найти это значение a. Найти решение.

Решение:

$$\begin{cases} 1 - ax^2y^2 > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

Заметим, что все функции, входящие в уравнения системы, четны относительно x. А вот это уже что-то.

Это значит, что если x – решения, то $(-x)$ – тоже решение. Единственное решение возможно, если $x = 0$

Подставим $x = 0$ в уравнения системы.

Получим:

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 1, \\ \log_2 2a^2 = 1, \end{cases}$$ отсюда $2a^2 = 2$, следовательно $\left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1. \end{array}\right.$

1) Если $a = 1$, то $\log_2\left(x^4y^2 + 2\right) = \log_2\left(1 - x^2y^2\right) + 1.$

Получаем: $$\begin{cases} 1 - x^2y^2 > 0, \\ x^4y^2 + 2 = 2 - 2x^2y^2. \end{cases}$$

$y^2\left(x^4 + 2x^2\right) = 0 \Rightarrow x = 0$ – единственное решение, так как $y > 0$.

Подставив $x = 0$ в первое уравнение исходной системы, получили, что $y = 1$.

2) Если $a = -1$, то

$\log_2\left(x^4y^2 + 2\right) = \log_2\left(1 + x^2y^2\right) + 1;$

$x^4y^2 + 2 = 2 + 2x^2y^2.$

$$y^2\left(x^4 - 2x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \sqrt{2}, \\ x = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$ – 3 решения. Это нам не подходит.

Ответ: $a = 1$. При этом система имеет единственное решение $(0; 1)$.

Найдите все значения a, при которых уравнение $(x^2-6|x|-a)^2+12(x^2-6|x|-a)+37=cos\frac{18\pi}{a}$ имеет ровно два решения.

Решение:

Обозначим $t=x^2-6|x|-a$. Уравнение примет вид:

$$t^2+12t+37=cos\frac{18\pi}{a};$$

$$(t+6)^2+1=cos\frac{18\pi}{a}.$$

Мы видим, что левая часть этого уравнения не меньше единицы, а правая часть — не больше единицы. Равенство может быть, только если обе они равны единице.

$$\begin{cases}(t+6)^2+1\geqslant 1,\\ cos\frac{18\pi}{a}\leqslant 1,\\ t^2+12t+37=cos\frac{18\pi}{a};\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(t+6)^2+1=1,\\ cos\frac{18\pi}{a}=1.\end{cases}$$

Получим:

$$\begin{cases}t=-6,\\ \frac{18\pi}{a}=2\pi n;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2-6|x|-a=-6,\\ \frac{9}{a}=n.\end{cases}$$

Второе уравнение означает, что частное $\frac{9}{a}$ — целое число.

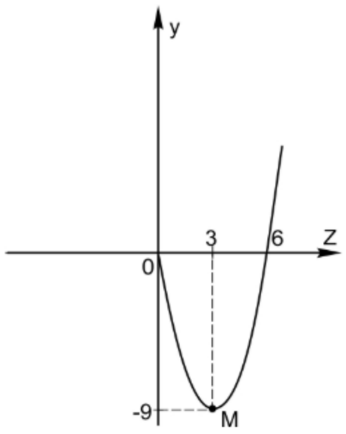
В первом уравнении сделаем замену $|x|=z,\ z\geq 0.$

Получим: $z^2-6z=a-6.$

Получим: $z^2 - 6z = a - 6$.

Обозначим $a - 6 = b$ и найдем, сколько корней имеет уравнение $z^2 - 6z = b$ при неотрицательных z и различных b

.



Нам нужно, чтобы исходное уравнение относительно x имело два корня.

Это происходит, когда уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственный положительный корень z_0, которому соответствуют $x_1 = z_0$ и $x_2 = -z_0$.

Заметим, что $z_0 \neq 0$, так как если $|x| = 0$, то $x = 0$ и двух корней не получится.

График функции $y(z) = z^2 - 6z$ – парабола с вершиной $M(3; -9)$.

1) Если $b = -9$, то уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственный корень $z = 3$, которому соответствуют два корня исходного уравнения: $x = 3$ и $x = -3$.

Поскольку $a = b + 6$, в этом случае $a = -3$. Это значение удовлетворяет и второму уравнению системы: $-\frac{9}{3} = -3$ – целое.

2) Уравнение $z^2 - 6z = b$ имеет единственное положительное решение также при $b > 0$, при этом $z > 6$ и $a > 6$.

Но если $a > 6$, условию $\frac{9}{a} = n$ удовлетворяет только $a = 9$.

Ответ: $a = -3$ или $a = 9$.

. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $64x^6-(3x+a)^3+4x^2-3x=a$ имеет более одного корня.

Решение:

$$64x^6+4x^2=(3x+a)^3+(3x+a)$$

а $64x^6$ представим как $(4x^2)^3$.

$$(4x^2)^3+4x^2=(3x+a)^3+(3x+a).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^3+t$.

Наше уравнение можно записать так: $f(4x^2)=f(3x+a)$. Слева и справа в нем значения одной и той же функции.

Функция $f(t)=t^3+t$ непрерывна и нечетна. Кроме того, $f'(t)=3t^2+1>0$ при всех t, поэтому $f(t)$монотонно возрастает и каждое свое значение принимает ровно один раз.
Значит, если $f(t_1)=f(t_2)$, то $t_1=t_2$. Мы получили, что $4x^2=3x+a$. Квадратное уравнение!

А условие задачи теперь формулируется так:

Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение $4x^2-3x-a=0$ имеет более одного корня.

Квадратное уравнение имеет 2 корня, если его дискриминант положителен.

$D=9+16a>0$, если $a>-\dfrac{9}{16}$.

Практические рекомендации

Чтобы успешно подготовиться к ЕГЭ по математике, рекомендуется регулярно тренироваться на примерах задач, посвящённых свойствам функций. Полезно ознакомиться с различными типами задач, возникающими в реальных тестах, и изучить методы их решения.

Таким образом, глубокое понимание свойств функций существенно повышает шансы на успешную сдачу ЕГЭ по математике и получение высоких баллов.

Спасибо за внимание!