Нюансы проверки заданий 13 и 15 профильного ЕГЭ по математике.

Никанорова Елена Валерьевна и
Буланова Наталья Владимировна,
МАОУ СОШ №16 города Екатеринбург

Задание 13. Умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

ЗАДАНИЕ 13

№13

а) $2\cdot\cos(2\pi+2x)-2-\sqrt{8}\cdot\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$2\cdot\cos 2x-2-\sqrt{8}\cdot\sin x-\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$4\cdot\sin^2 x+\sqrt{8}\cdot\sin x+\sqrt{12}\cdot\sin x+\sqrt{6}=0$

$2\cdot\sin x\,(2\cdot\sin x+\sqrt{2})+\sqrt{3}(2\sin x+\sqrt{2})=0$

$(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x+\sqrt{2})=0$

т.к. произведение равно нулю, то

$2\sin x+\sqrt{3}=0$ или $2\cdot\sin x+\sqrt{2}=0$

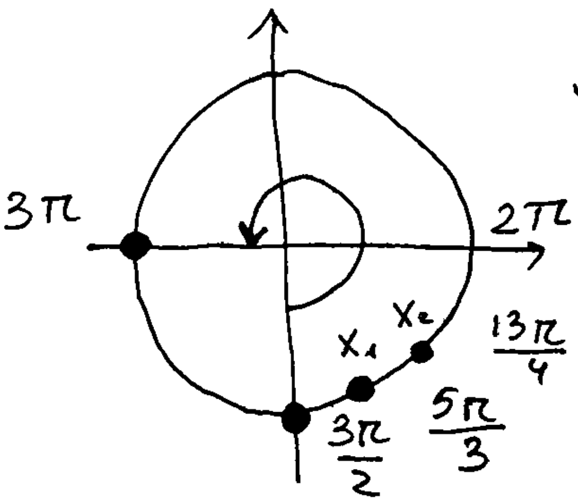
$\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sin x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$x_1=-\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ m\in Z$ $\qquad$ $x_3=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$

$x_2=-\frac{2\pi}{3}+2\pi h,\ h\in Z$ $\qquad$ $x_4=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

ЗАДАНИЕ 13

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$



$x_1 = \frac{5\pi}{3}$ $\quad$ $x_2 = \frac{13\pi}{4}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in Z$;

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi h, h \in Z$;

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{13\pi}{4}$

№13, а) $2\cos(2\pi+2x)-2-\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$2\cos 2x-2-\sqrt{8}\sin x-\sqrt{6}-\sqrt{12}\sin x=0$

$2\cos^2 x-2\sin^2 x-2-\sqrt{8}\sin x-\sqrt{6}-\sqrt{12}\sin x=0$

$\cancel{2}-2\sin^2 x-2\sin^2 x-\cancel{2}-\sqrt{8}\sin x-\sqrt{6}-\sqrt{12}\sin x=0$

$-4\sin^2 x-\sqrt{8}\sin x-\sqrt{12}\sin x-\sqrt{6}=0 \quad |\cdot(-1)$

$4\sin^2 x+\sqrt{8}\sin x+\sqrt{12}\sin x+\sqrt{6}=0$

Пусть $\sin x=t$, $-1\le t\le 1$, тогда

$4t^2+\sqrt{8}t+\sqrt{12}t+\sqrt{6}=0$

$D=8+2\sqrt{12\cdot 8}+12-4(4+\sqrt{6})$

$D=8+2\sqrt{4\cdot 2\cdot 4\cdot 3}+12-16-4\sqrt{6}$

$D=8+4\sqrt{6}+12-16-4\sqrt{6}$

$D=4$

$t_1=\frac{-\sqrt{8}-\sqrt{12}+2}{8}=\frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2}{8}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{4}$

$t_2=\frac{-\sqrt{8}-\sqrt{12}-2}{8}=\frac{-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2}{8}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{3}-2}{4}$

Обратная замена:

↓ см. лист 5

ЗАДАНИЕ 13

№13

а) $2+2\cos(\pi-2x)+\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$2+2\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin^2 x\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)+\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$2+2\sin^2 x-2+2\sin^2 x+\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$4\sin^2 x+\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x$

$16\sin^4 x+8\sin^2 x=6+12\sin^2 x$

$16\sin^4 x-4\sin^2 x-6=0$

№13

а) $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$

$\cos 2x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$\cos^2 x - \sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$

$-2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = 0$

$\sin x(\sqrt{2} - 2\sin x) = 0$

$\sin x = 0$; или $\sqrt{2} - 2\sin x = 0$

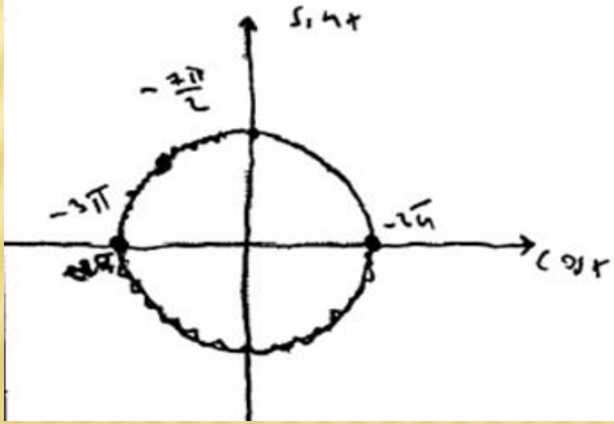
$x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

$2\sin x = \sqrt{2}$

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$



$x_1 = -3\pi \quad x_2 = -2\pi$

$x_3 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{14\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = -\frac{13\pi}{4}$

Ответ: а) $x = \pi k;\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$ б) $x_1 = -3\pi$; $x_2 = -2\pi$; $x_3 = -\frac{13\pi}{4}$

ЗАДАНИЕ 13

№13

а) $\cos 2x + \sqrt{2}\cdot\cos(x+\pi)+1=0$

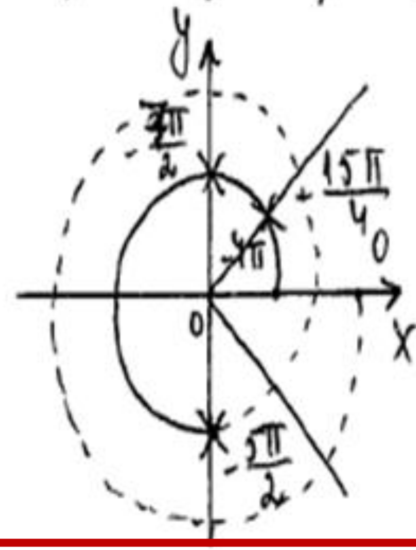
б) $x \in \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\cdot\cos x + 1 = 0$

$\sqrt{2}\cdot\cos x\left(\sqrt{2}\cdot\cos x - 1\right) = 0$

$\cos x = 0$ или $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$ $\quad x = \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$



$-4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

ЗАДАНИЕ 13

№13. а) $\cos 2x + \sqrt{2}\cos(x+\pi) + 1 = 0$ б) Используя числовую окружность отберем корни на промежутке $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$:

$2\cos^2 x - 1 - \sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

$\cos x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

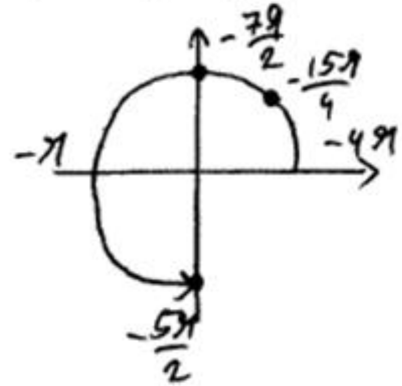
$\cos x = 0$ или $2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $\qquad \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$

Нам подходят:

$\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$



$-4\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4}$

Нам подходят:

$-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $n \in Z$

б) $-\frac{15\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$

ЗАДАНИЕ 15. УМЕНИЕ РЕШАТЬ НЕРАВЕНСТВА, УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЁМОВ

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15 $50x^2-50x+12{,}5 \neq 0 \quad |:5$

$$\frac{27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1}{50x^2-50x+12{,}5} \geqslant 0$$

$10x^2-10x+2{,}5 \neq 0$

$D: 100-100=0$

$x_1 = \frac{10}{20}; \quad x \neq \frac{1}{2}$

$50x^2-50x+12{,}5$ – всегда больше 0, кроме случая, когда $x=\frac{1}{2}$, поэтому рассмотрим только

$27^{x+1}-3\cdot 9^{x+1}+3^{x+2}-1 \geqslant 0.$

$27\cdot 3^{3x}-27\cdot 3^{2x}+9\cdot 3^{x}-1 \geqslant 0 \quad |:27$

$3^{3x}-3^{2x}+3^{x-1}-3^{-3} \geqslant 0$

$3x-2x+x-1+3 \geqslant 0$

$2x \geqslant -2$

$x \geqslant -1$ ~~$x \in ($~~

~~$x \in [-1; +\infty)$~~ $x \in [-1; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

Ответ: $x \in [-1; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

№15. $\dfrac{27^x - 3\cdot 9^{x+1} + 3^{x+5} - 729}{50x^2 + 10x + 0,5} \leq 0$

огр: $50x^2 + 10x + 0,5 \neq 0$

$D = 100 - 100 = 0$

$x = \dfrac{-10}{100} \neq -\dfrac{1}{10}$

Поработаем с числителем (1):

$27^x - 3\cdot 9\cdot 9^x + 3^x\cdot 243 - 729 \leq 0$

Пусть $3^x = t$, $t > 0$, тогда

$t^3 - 27t^2 + 243t - 729 \leq 0$

$(t^3 - 729) - 27t(t-9) \leq 0$

$(t^3 - 9^3) - 27t(t-9) \leq 0$

$(t-9)(t^2 + 9t + 81) - 27t(t-9) \leq 0$

$(t-9)(t^2 + 9t + 81 - 27t) \leq 0$

$(t-9)(t^2 - 18t + 81)$

$(t-9)(t-9)^2 \leq 0$

$(t-9)^3 \leq 0$ $\quad t \in (-\infty; 9]$

обратная замена:

$3^x \leq 9$

$x \leq 2$

с учетом огр $x \in (-0,1; 2]$

Ответ: $(-0,1; 2]$

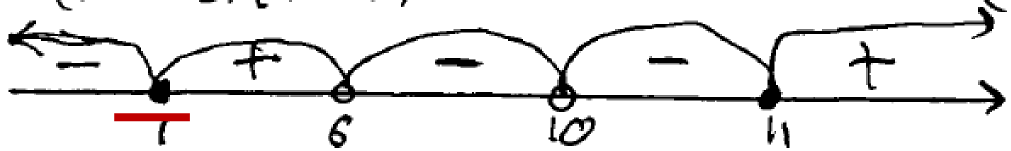
№15 $11^x - 6 - \dfrac{24\cdot 11^x - 244}{121^x - 16\cdot 11^x + 60} \le \dfrac{1}{11^x - 10}$

$11^x = t$

$121^x = (11^x)^2 = t^2$

$\dfrac{t-6}{1} - \dfrac{24t-244}{(t-6)(t-10)} - \dfrac{1}{t-10} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^3-22t^2+131t-110}{(t-6)(t-10)} \le 0$

$\dfrac{(t-10)(t^2-12t+11)}{(t-10)(t-6)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-10)(t-11)(t-1)}{(t-10)(t-6)} \le 0$



$t < 1$ $\quad 6 < t < 10 \quad 10 < t \le 11$

$11^x < 1 \quad 6 < 11^x < 10 \quad 10 < 11^x \le 11$

$11^x < 11^0 \quad 11^{\log_{11} 10} < 11^x \le 11^1$

$11^{\log_{11} 6} < 11^x < 11^{\log_{11} 10}$

Т.к. $11 > 1$, то $y = 11^x$ — возраст. $\Rightarrow$

$x < 0 \quad \log_{11} 6 < x < \log_{11} 10 \quad \log_{11} 10 < x \le 1$

Ответ: $x < 0$, $\log_{11} 6 < x < \log_{11} 10$, $\log_{11} 10 < x \le 1$.

ЗАДАНИЕ 15

(15) $$11^x - 6 - \frac{24\cdot 11^x - 244}{121^x - 16\cdot 11^x + 60} \le \frac{1}{11^x - 10}$$

$$(11^x - 6) - \frac{24\cdot(11^x - 10) - 4}{(11^x - 10)(11^x - 6)} \le \frac{1}{11^x - 10}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 11^x \ne 10 \\ 11^x \ne 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ne \log_{11}(10) \\ x \ne \log_{11}(6) \end{cases}$

$$\frac{(11^x - 6)^2(11^x - 10) - 24\cdot(11^x - 10) + 4 - (11^x - 6)}{(11^x - 10)(11^x - 6)} \le 0$$

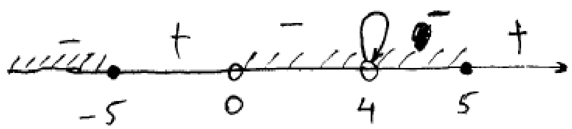
$$\frac{(11^x - 6)^2((11^x - 6) - 4) - 24\cdot((11^x - 6) - 4) + 4 - (11^x - 6)}{((11^x - 6) - 4)\cdot(11^x - 6)} \le 0$$

$t = 11^x - 6$

$$\frac{t^2(t-4) - 24\cdot(t-4) + 4 - t}{(t-4)\cdot t} \le 0$$

$$\frac{t^3 - 4t^2 - 25t + 100}{(t-4)\cdot t} \le 0$$

$$\frac{(t-4)(t-5)(t+5)}{(t-4)\cdot t} \le 0$$



$t \in (-\infty; -5] \cup (0; 5] \setminus \{4\}$

$$\left[\begin{array}{l} t \le -5 \\ \begin{cases} t > 0 \\ t < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} t > 4 \\ t \le 5 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 11^x - 6 \le -5 \\ \begin{cases} 11^x - 6 > 0 \\ 11^x - 6 < 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 11^x - 6 > 4 \\ 11^x - 6 \le 5 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 11^x \le 1 \\ \begin{cases} 11^x > 6 \\ 11^x < 10 \end{cases} \\ \begin{cases} 11^x > 10 \\ 11^x \le 11 \end{cases} \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \le 0 \\ x \in (\log_{11} 6; \log_{11} 10) \\ x \in (\log_{11} 10; 1] \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty, 0] \cup (\log_{11} 6; \log_{11} 10) \cup (\log_{11} 10; 1]$

№15

$$11^x - 6 - \frac{24\cdot 11^x - 244}{121^x - 16\cdot 11^x + 60} \le \frac{1}{11^x - 10}$$

$[11^x = t]$ $\quad 11^x > 0$

$$(t-6) - \frac{24\cdot t - 244}{t^2 - 16t + 60} - \frac{1}{t-10} \le 0$$

$$(t-6)^{((t-10)(t-6)} - \frac{24t - 244}{(t-6)(t-10)} - \frac{1}{t-10}^{((t-6)} \le 0$$

$$\frac{(t-6)^2(t-10) - 24t - 244 - 1(t+6)}{(t-6)(t-10)} \le 0$$

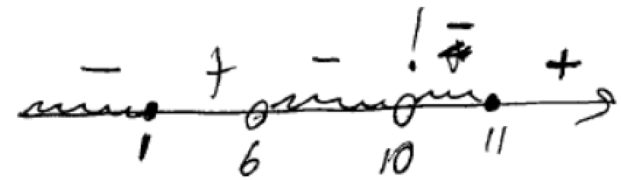
$$\frac{(t-6)^2(t-10)-25t-250}{(t-6)(t-10)}\le 0$$

$$\frac{(t-6)^2(t-10)-25(t-10)}{(t-6)(t-10)}\le 0$$

$$\frac{(t-10)\left((t-6)^2-5^2\right)}{(t-6)(t-10)}\le 0$$

$$\frac{(t-10)(t-6-5)(t-6+5)}{(t-6)(t-10)}\le 0$$

$$\frac{(t-10)(t-11)(t-1)}{(t-6)(t-10)}\le 0 \qquad [t=11^x]$$



$11^x\le 1 \quad 6<11^x\le 11 \qquad 11^x\ne 10$

$x\le 0 \quad \log_{11}6<x\le 1 \qquad x\ne \log_{11}10$

$x\in \cancel{(-\infty;0]\cup(\log_{11}6;1]/\{\log_{11}10\}}$

$x\in(-\infty;0]\cup(\log_{11}6;\log_{11}10)\cup(\log_{11}10;1]$

№ 14

$$\log_4\left((x-5)(x^2-2x-15)\right)+1 \geq 0{,}5\log_2 (x-5)^2$$

$$\log_4\left((x-5)(x^2-2x+15)\right)+\log_4 4 \geq \log_4 (x-5)^2$$

$$\log_4 \left((x-5)(x^2-2x-15)\cdot 4\right) \geq \log_4 (x-5)^2$$

$$\log_4 \frac{(x-5)(x^2-2x-15)\cdot 4}{(x-5)^2} \geq 0$$

$$\log_4 \frac{(x-5)(x^2-2x-15)\cdot 4}{(x-5)^2} \geq \log_4 1$$

т.к $\log_4 x \uparrow$, то

$$\frac{(x-5)(x^2-2x-15)\cdot 4}{(x-5)^2} \geq \cancel{10}\ 1$$

$$x^2-2x-15=(x+3)(x-5)$$

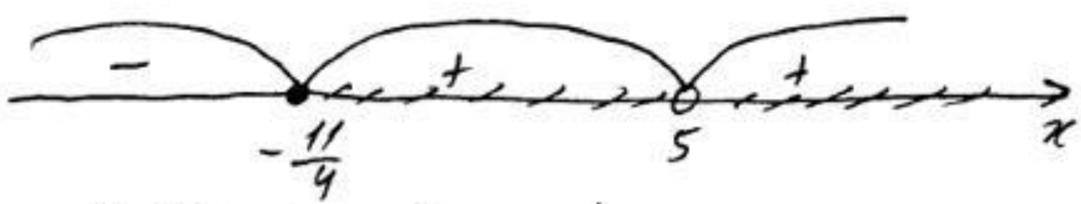
$$\frac{4\cdot(x-5)(x^2-2x-15)-(x-5)^2}{(x-5)^2} \geq 0$$

$$\frac{4\cdot(x-5)(x-5)(x+3)-(x-5)^2}{(x-5)^2} \geq 0$$

$$\frac{(x-5)^2\,(4(x+3)-1)}{(x-5)^2} \geq 0$$

$$4(x+3)-1 = 4x+12-1 = 4x+11 \Rightarrow x=\frac{11}{-4}$$

$$\frac{(x-5)^2\,\left(x+\frac{11}{4}\right)}{(x-5)^2} \geq 0$$



$$x \in \left[-\frac{11}{4};\,5\right) \cup (5;\,+\infty)$$

Ответ: $x \in \left[-\frac{11}{4};\,5\right) \cup (5;\,+\infty)$

Спасибо за внимание!