ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАНИЯ №13 ЕГЭ

Типичные ошибки в задании 13 профильного ЕГЭ по математике

Ошибки при решении уравнения (часть «а»)

- Неверное применение формул приведения.
- Потеря корней при делении на переменную, содержащую тригонометрическую функцию.
- Ошибки при преобразовании тригонометрических выражений.
- Игнорирование ограничений (ОДЗ).

Ошибки при отборе корней (часть «б»)

- Неправильно выбранный или не отмеченный отрезок.
- Неправильное определение направления движения по окружности.
- Арифметические ошибки при вычислении конкретных значений корней.
- Отсутствие пояснений к отбору.
- Неполный перебор корней.

1. а) Решите уравнение

$$2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x - \pi).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

а) ***1 способ***

$$2\sin^2 x + \sin x(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} = 0$$

Замена переменной

$\sin x = t$, $-1 \le t \le 1$

$$2t^2 + t(\sqrt{2} - 2) - \sqrt{2} = 0$$

$$\mathbf{D = 6 + 4\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} + 2\right)^2},$$

$t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

2 способ

$$2sin^2x + \sqrt{2}sinx = \sqrt{2} + 2sinx$$

$$\sqrt{2}(sinx - 1) + 2\mathrm{sinx}(sinx - 1) = 0$$

$$(\mathrm{sinx}\text{-}1)(\sqrt{2} + 2sinx) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} sinx = 1 \\ sinx = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

б) $x_1 = -\frac{3}{2}\pi$,

$x_2 = -\frac{3}{4}\pi$

<u>ОТВЕТ:</u> а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z;$

$x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in Z.$

б) $x_1 = -\frac{3}{2}\pi$; $x_2 = -\frac{3}{4}\pi$.

2. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2\cos x - 2\cos^3 x} + \sin 2x = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; -\frac{\pi}{6}]$.

a) $\sqrt{2\cos x - 2\cos^3 x} = -\sin 2x$

$$\sqrt{f(x)} = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} g(x) \geq 0, \\ g^2(x) = f(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin 2x \geq 0 \\ 2\cos x - 2\cos^3 x = \sin^2 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z \end{array}\right. \\ -\dfrac{\pi}{2} + \pi n \leq x < \pi n, n \in Z \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z \end{array}\right.$$

б) $x_1 = -\pi$,

$x_2 = -\frac{\pi}{2}$,

$x_3 = -\frac{\pi}{3}$.

<u>ОТВЕТ:</u> а) $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z$;

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z$.

б) $x_1 = -\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{2}$, $x_3 = -\frac{\pi}{3}$.

3. а) Решите уравнение

$$2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{tg}x+\text{ctg}x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{3\pi}{2}; 3\pi]$.

а) ОДЗ $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

Замена переменной

$$\cos x - \sin x = t$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\sqrt{2}t = \frac{1-t^2}{2}, t^3 - t + \sqrt{2} = 0$$

1) *методом подбора* $t = -\sqrt{2}$, *тогда по схеме Горнера*

$$t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0, D < 0;$$

ИЛИ

2) $t^3 - 2t + t + \sqrt{2} = 0$

$$(t - \sqrt{2})(t^2 - \sqrt{2}t + 1) = 0$$

$t = -\sqrt{2}$

$\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$

$x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in Z.$

б) $x = \frac{11}{4}\pi$.

ОТВЕТ: а) $x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in Z$;

б) $x = \frac{11}{4}\pi$.

4. а) Решите уравнение $7^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{17}{2}\pi;\ -7\pi]$.

а) $7^{\sqrt{\cos^2 x}} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$$

$$7^{|\cos x|} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$$

$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 0 = \frac{48}{7} \end{cases}$, нет решений; $\begin{cases} \cos x < 0 \\ 7 \cdot (7^{-\cos x} - 7^{\cos x}) = 48 \end{cases}$

Замена переменной

$7^{\cos x} = t, \qquad t > 0$

$\frac{7}{t} - 7t = 48, t = \frac{1}{7}$

$7^{\cos x} = 7^{-1}$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

б) $x = -7\pi$.

ОТВЕТ: а) $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$;

б) $x = -7\pi$.

5. а) Решите уравнение $\cos^3 x - \cos^2 x + \cos x = \frac{1}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2};\ 2\pi]$.

а) $3\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

$$2\cos^3 x + (\mathbf{\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1}) = 0$$

$$2\cos^3 x + (\mathbf{\cos x - 1})^3 = 0$$

Замена переменной

$\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$

$2t^3 = (1-t)^3$, $t = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$

$$\cos x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$$

$$x = \pm\arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} + 2\pi n, n \in Z.$$

б) $x = 2\pi - \arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

ОТВЕТ: а) $x = \pm\arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}} + 2\pi n, n \in Z$;

б) $x = 2\pi - \arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$.

6. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)-\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{3}{2}\pi\right]$.

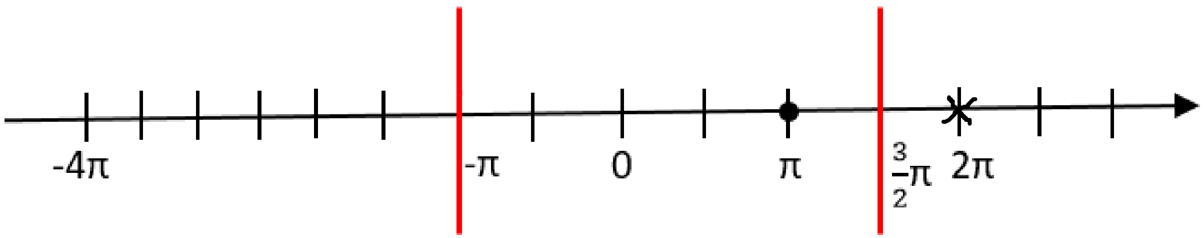
$$a)\ \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{3} - \cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + \mathbf{6\pi k} \\ x = 2\pi + \mathbf{6\pi k}, k \in Z \end{array}\right.$$

б) Отбор корней

1) с помощью тригонометрической окружности;

2) по числовой оси:



3) с помощью двойного неравенства:

$$-\pi \le \pi + 6\pi k \le \frac{3}{2}\pi$$

$$-\frac{1}{3} \le k \le \frac{1}{12}$$

$$k = 0, x = \pi;$$

$$-\pi \le 2\pi + 6\pi k \le \frac{3}{2}\pi$$

$-\frac{1}{2} \le k \le -\frac{1}{12}$, нет $k \in Z$.

ОТВЕТ: а) $x = \pi + 6\pi k,\ k \in Z$; $x = 2\pi + 6\pi k, k \in Z$.

б) $x = \pi$.

7. а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos x + \sin 2x + \frac{1}{4}\right) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{3}{2}\pi]$.

a) $\cos x + \sin 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\cos x + \sin 2x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \log_a f(x) = b \\ \Updownarrow \\ a^b = f(x), a \neq 1, a > 0 \end{array}}$$

б) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{2}$; $x_4 = \frac{7}{6}\pi$, $x_5 = -\frac{\pi}{2}$, $x_6 = \frac{3\pi}{2}$.

ОТВЕТ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in Z.$$

б) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi$; $x_2 = -\frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{2}$; $x_4 = \frac{7}{6}\pi$, $x_5 = -\frac{\pi}{2}$, $x_6 = \frac{3\pi}{2}$.

8. а) Решите уравнение $(3tg^2x - 1)\sqrt{4\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{11}{4}\pi]$.

а) ОДЗ $\mathrm{tg}x \geq 0$

1) $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$

$\cos x > 0$

2) $\mathbf{tg^2x = \frac{1}{3}}$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

3) $\begin{cases} x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \\ \cos x > 0 \end{cases}$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$$

$\sin^2 x = a, a > 0,$

$x = \pm\arcsin\sqrt{a} + \pi n, n$

$\cos^2 x = a, a > 0,$

$x = \pm\arccos\sqrt{a} + \pi n, n$

$\mathrm{tg}^2 x = a, a > 0,$

$x = \pm\mathrm{arctg}\sqrt{a} + \pi n, n \in Z$

б) $x = \frac{13}{6}\pi$.

ОТВЕТ: а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$;

б) $x = \frac{13}{6}\pi$.

9. а) Решите уравнение

$$\log_{8+2x-x^2}(x+2) = \log_{12-3x}(x+2).$$

б) Найдите все корни этого уравнения,

принадлежащие отрезку $[\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5};\ \sqrt{\log_2 3}]$.

а) **1способ**

$$\frac{1}{log_{x+2}(8+2x-x^2)}=\frac{1}{log_{x+2}(12-3x)}$$

$$8+2x-x^2=12-3x$$

$x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

Проверка: $x_1 = 4$ – посторонний корень,

$x_2 = 1$- удовлетворяет уравнению

а) **1способ**

$$\frac{1}{log_{x+2}(8+2x-x^2)} = \frac{1}{log_{x+2}(12-3x)}$$

$$8+2x-x^2 = 12-3x$$

$x_1 = 4$, $x_2 = 1$.

Проверка: $x_1 = 4$ – посторонний корень,

$x_2 = 1$- удовлетворяет уравнению

Отдельно проверяем случай $x+2 = 1$,

$x = -1$ – является корнем уравнения.

2 способ

$$\frac{\lg(x+2)}{\lg(8+2x-x^2)} = \frac{\lg(x+2)}{\lg(12-3x)}$$

$$\lg(x+2)\left(\frac{1}{\lg(8+2x-x^2)} - \frac{1}{\lg(12-3x)}\right) = 0$$

$x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=4$ – посторонний корень

ОДЗ

$$\begin{cases} x+2>0 \\ 8+2x-x^2>0 \\ 12-3x>0 \\ 8+2x-x^2 \neq 1 \\ 12-3x \neq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2<x<4 \\ x \neq \frac{11}{3} \\ x \neq 1 \pm \sqrt{8} \end{cases}$$

$x \in (-2; 1-\sqrt{8}) \cup (1-\sqrt{8}; \frac{11}{3}) \cup (\frac{11}{3}; 1+\sqrt{8}) \cup (1+\sqrt{8}; 4)$

б) $[\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5};\ \sqrt{\log_2 3}]$

$$\log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$$

1) $x = -1 = \log_3 3 < -\log_3 2,$

$-1 \notin [\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5};\ \sqrt{\log_2 3}]$

2) $x = 1 = \log_3 3 > \log_3 \frac{1}{2}$

$1 = \log_2 2 < \sqrt{\log_2 3},$

$1 \in [\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5};\ \sqrt{\log_2 3}]$

ОТВЕТ: а) $x = \pm 1$;

б) $x = 1$.

10. а) Уравнение имеет корни:

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{9}{2}\pi; -\pi\right]$.

$$a)\ -\frac{9}{2}\pi = -\frac{27}{6}\pi$$

$$-\pi = -\frac{6}{6}\pi$$

$$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n = \pm\frac{2}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

б) $x_1 = -\frac{26}{6}\pi = -\frac{13}{3}\pi$,

$x_2 = -\frac{23}{6}\pi$,

$x_3 = -\frac{22}{6}\pi = -\frac{11}{3}\pi$,

$x_4 = -\frac{17}{6}\pi$,

$x_5 = -\frac{14}{6}\pi = -\frac{7}{3}\pi$,

$x_6 = -\frac{11}{6}\pi$,

$x_7 = -\frac{10}{6}\pi = -\frac{5}{3}\pi$.

ОТВЕТ: а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

б) $x_1 = -\frac{13}{3}\pi,$

$x_2 = -\frac{23}{6}\pi,$

$x_3 = -\frac{11}{3}\pi,$

$x_4 = -\frac{17}{6}\pi,$

$x_5 = -\frac{7}{3}\pi,$

$x_6 = -\frac{11}{6}\pi,$

$x_7 = -\frac{5}{3}\pi.$

Как избежать ошибок

- Проверка ОДЗ.
- Факторизация.
- Визуализация.
- Аккуратность в вычислениях.
- Внимательность к оформлению.