

1. а) Решите уравнение $2 - 2\cos^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x - \pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

РЕШЕНИЕ:

а) **1 способ**

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} + 2\sin x$$

$$\sqrt{2}(\sin x - 1) + 2\sin x(\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(\sqrt{2} + 2\sin x) = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2 способ

$$2\sin^2 x + \sin x(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2} = 0$$

Замена переменной

$$\sin x = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$2t^2 + t(\sqrt{2} - 2) - \sqrt{2} = 0$$

$$D = 6 + 4\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 2)^2,$$

$$t_1 = 1, t_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{б) } x_1 = -\frac{3}{2}\pi,$$

$$x_2 = -\frac{3}{4}\pi$$

ОТВЕТ: а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = -\frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x_1 = -\frac{3}{2}\pi; x_2 = -\frac{3}{4}\pi.$$

2. а) Решите уравнение $\sqrt{2 \cos x - 2 \cos^3 x} + \sin 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; -\frac{\pi}{6}]$.

РЕШЕНИЕ:

$$\text{а) } \sqrt{2 \cos x - 2 \cos^3 x} = -\sin 2x$$

$$\begin{cases} -\sin 2x \geq 0 \\ 2 \cos x - 2 \cos^3 x = \sin^2 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ -\frac{\pi}{2} + \pi n \leq x < \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{б) } x_1 = -\pi,$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2},$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3}.$$

ОТВЕТ: а) $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x_1 = -\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2}, x_3 = -\frac{\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{f(x)} &= g(x) \\ &\Downarrow \\ \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ g^2(x) = f(x) \end{cases} \end{aligned}$$

3. а) Решите уравнение $2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right]$.

РЕШЕНИЕ:

а) ОДЗ $x \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sqrt{2}(\cos x - \sin x) = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

Замена переменной

$$\cos x - \sin x = t$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\sqrt{2}t = \frac{1-t^2}{2}, t^3 - t + \sqrt{2} = 0$$

1) *методом подбора* $t = -\sqrt{2}$, тогда по схеме Горнера

$$t^2 - \sqrt{2}t + 1 = 0, D < 0;$$

ИЛИ

$$2) t^3 - 2t + t + \sqrt{2} = 0$$

$$(t - \sqrt{2})(t^2 - \sqrt{2}t + 1) = 0$$

$$t = -\sqrt{2}$$

$$\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$$

$$x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x = \frac{11}{4}\pi.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } x = \frac{11}{4}\pi.$$

4. а) Решите уравнение $7^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{17}{2}\pi; -7\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

а) $7^{\sqrt{\cos^2 x}} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$7^{|\cos x|} - 7^{\cos x} = \frac{48}{7}$$

$$\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 0 = \frac{48}{7}, \text{ нет решений;} \end{cases} \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ 7 \cdot (7^{-\cos x} - 7^{\cos x}) = 48 \end{cases}$$

Замена переменной

$$7^{\cos x} = t, \quad t > 0$$

$$\frac{7}{t} - 7t = 48, \quad t = \frac{1}{7}$$

$$7^{\cos x} = 7^{-1}$$

$$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) $x = -7\pi$.

ОТВЕТ: а) $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

б) $x = -7\pi$.

5. а) Решите уравнение $\cos^3 x - \cos^2 x + \cos x = \frac{1}{3}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

а) $3\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0$

$$2\cos^3 x + (\cos^3 x - 3\cos^2 x + 3\cos x - 1) = 0$$

$$2\cos^3 x + (\cos x - 1)^3 = 0$$

Замена переменной

$$\cos x = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$2t^3 = (1 - t)^3, t = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

$$\cos x = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x = 2\pi - \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } x = \pm \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } x = 2\pi - \arccos \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}}.$$

6. а) Решите уравнение $\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) - \cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{3}{2}\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

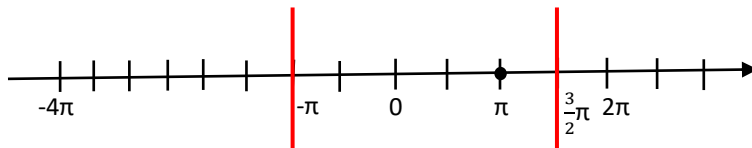
а) $\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{cases} x = \pi + 6\pi k \\ x = 2\pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) Отбор корней

1) с помощью тригонометрической окружности;

2) по числовой оси:



3) с помощью двойного неравенства:

$$-\pi \leq \pi + 6\pi k \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$-\pi \leq 2\pi + 6\pi k \leq \frac{3}{2}\pi$$

$$-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{12}$$

$$-\frac{1}{2} \leq k \leq -\frac{1}{12}, \text{ нет } k \in \mathbb{Z}.$$

$$k = 0, x = \pi;$$

ОТВЕТ: а) $x = \pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 2\pi + 6\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $x = \pi$.

7. а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}\left(\cos x + \sin 2x + \frac{1}{4}\right) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\pi; \frac{3}{2}\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

а) $\cos x + \sin 2x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\cos x + \sin 2x = 0$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi; x_2 = -\frac{\pi}{6}; x_3 = \frac{\pi}{2}; x_4 = \frac{7}{6}\pi, x_5 = -\frac{\pi}{2}, x_6 = \frac{3\pi}{2}$.

ОТВЕТ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

б) $x_1 = -\frac{5}{6}\pi; x_2 = -\frac{\pi}{6}; x_3 = \frac{\pi}{2}; x_4 = \frac{7}{6}\pi, x_5 = -\frac{\pi}{2}, x_6 = \frac{3\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \log_a f(x) &= b \\ \Updownarrow \\ a^b &= f(x), a \neq 1, a > 0 \end{aligned}$$

8. а) Решите уравнение $(3tg^2x - 1)\sqrt{4\cos x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{11}{4}\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

а) ОДЗ $tgx \geq 0$

$$1) \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\cos x > 0$$

$$2) \textcolor{red}{tg^2 x} = \textcolor{red}{\frac{1}{3}}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$3) \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x = \frac{13}{6}\pi.$$

$$\text{ОТВЕТ: а) } x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{б) } x = \frac{13}{6}\pi.$$

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= a, a > 0, \\ x &= \pm \arcsin \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= a, a > 0, \\ x &= \pm \arccos \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tg^2 x &= a, a > 0, \\ x &= \pm \arctg \sqrt{a} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

9. а) Решите уравнение $\log_{8+2x-x^2}(x+2) = \log_{12-3x}(x+2)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5}; \sqrt{\log_2 3}]$.

РЕШЕНИЕ:

а) **1 способ**

$$\frac{1}{\log_{x+2}(8+2x-x^2)} = \frac{1}{\log_{x+2}(12-3x)}$$

$$8+2x-x^2 = 12-3x$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1.$$

Проверка: $x_1 = 4$ – посторонний корень,

$x_2 = 1$ – удовлетворяет уравнению

Отдельно проверяем случай $x+2 = 1$,

$x = -1$ – является корнем уравнения.

2 способ

$$\frac{\lg(x+2)}{\lg(8+2x-x^2)} = \frac{\lg(x+2)}{\lg(12-3x)}$$

$$\lg(x+2) \left(\frac{1}{\lg(8+2x-x^2)} - \frac{1}{\lg(12-3x)} \right) = 0$$

$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 4$ – посторонний корень

ОДЗ

$$\begin{cases} x+2 > 0 \\ 8+2x-x^2 > 0 \\ 12-3x > 0 \\ 8+2x-x^2 \neq 1 \\ 12-3x \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < x < 4 \\ x \neq \frac{11}{3} \\ x \neq 1 \pm \sqrt{8} \end{cases}$$

$$x \in (-2; 1 - \sqrt{8}) \cup (1 - \sqrt{8}; \frac{11}{3}) \cup (\frac{11}{3}; 1 + \sqrt{8}) \cup (1 + \sqrt{8}; 4)$$

б) $[\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5}; \sqrt{\log_2 3}]$

$$\log_3 \frac{1}{2} = -\log_3 2$$

$$1) x = -1 = \log_3 3 < -\log_3 2, \\ -1 \notin [\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5}; \sqrt{\log_2 3}]$$

$$2) x = 1 = \log_3 3 > \log_3 \frac{1}{2}$$

$$1 = \log_2 2 < \sqrt{\log_2 3},$$

$$1 \in [\log_{\sqrt{3}}\sqrt{0,5}; \sqrt{\log_2 3}]$$

ОТВЕТ: а) $x = \pm 1$;

б) $x = 1$.

10. а) Уравнение имеет корни:

$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $[-\frac{9}{2}\pi; -\pi]$.

РЕШЕНИЕ:

$$\text{а) } -\frac{9}{2}\pi = -\frac{27}{6}\pi$$

$$-\pi = -\frac{6}{6}\pi$$

$$\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n = \pm \frac{2}{6}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{6} + \pi k = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x_1 = -\frac{26}{6}\pi = -\frac{13}{3}\pi,$$

$$x_2 = -\frac{23}{6}\pi,$$

$$x_3 = -\frac{22}{6}\pi = -\frac{11}{3}\pi,$$

$$x_4 = -\frac{17}{6}\pi,$$

$$x_5 = -\frac{14}{6}\pi = -\frac{7}{3}\pi,$$

$$x_6 = -\frac{11}{6}\pi,$$

$$x_7 = -\frac{10}{6}\pi = -\frac{5}{3}\pi.$$

ОТВЕТ: а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x_1 = -\frac{13}{3}\pi,$$

$$x_2 = -\frac{23}{6}\pi,$$

$$x_3 = -\frac{11}{3}\pi,$$

$$x_4 = -\frac{17}{6}\pi,$$

$$x_5 = -\frac{7}{3}\pi,$$

$$x_6 = -\frac{11}{6}\pi,$$

$$x_7 = -\frac{5}{3}\pi.$$