КОРИФЕЙ

Свойства функций в задачах с параметром

Сумина Татьяна Геннадьевна

Монотонность

Основные утверждения

- Если функция $y=f(x)$ строго монотонна, то уравнение $f(x) = A$ (где A - любое действительное число) имеет не более одного корня.
- Если функция $y=f(x)$ возрастает, а функция $y=g(x)$ убывает, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.
- Если функция $y=f(x)$ монотонна, то уравнение $f(a) =f(b)$ равносильно уравнению $a=b$ на области определения функции $y=f(x)$

Монотонность

Задача 1

Решить уравнение: $3^x+4^x=5^x$

Задача 2

При каких значениях параметра а уравнение $f(x^2+2a)=f(ax)$ имеет один корень, где $f(x)=\sin x+2x$

Задача 3

Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $\sin^{14}x+(a-3\sin x)^7+\sin^2x+a=3\sin x$ имеет хотя бы одно решение

Монотонность и ломаные

КОРИФЕЙ+
ИНТЕЛЛЕКТ ШКОЛА

Задача 1

Найдите все пары чисел (a,b) такие, что уравнение
$2|x-2|-|x+1|+x-1=ax+b$ имеет не менее пяти различных решения.

Задача 2

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство
$||x+2a|-3a|+||3x-a|+4a|\leq 7x+24$ выполняется при всех значениях x из отрезка [0;7]

Задача 3

Найдите все значения параметра a, при которых уравнение
$(4x+|x-a|-|3x+1|)^2-(a+1)(4x+|x-a|-|3x+1|)+1=0$ имеет ровно два решения.

Ограниченность

Основные утверждения

- Если функция $y=f(x)$ ограничена сверху, причём max f(x)=A, а функция $y=g(x)$ ограничена снизу, причём min g(x)=A, то уравнение

$$f(x) = g(x) \text{ равносильно системе } \begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$$

- Если функция $y=f(x)$ ограничена сверху, причём max f(x)=A, а функция $y=g(x)$ ограничена снизу, причём min g(x)=A, то неравенство

$$f(x) \geq g(x) \text{ равносильно системе } \begin{cases} f(x)=A \\ g(x)=A \end{cases}$$

Ограничения на множества значений функции

1) прямая $y = kx + b$: $y \in R$, если $k \neq 0$;

2) парабола $y = ax^2 + bx + c$: $y \in \left[-\dfrac{D}{4a};\infty\right)$, если $a > 0$ и $y \in \left(-\infty;-\dfrac{D}{4a}\right]$, если $a < 0$;

3) $y = \sqrt[2n]{x}$, $y = |x|$: $y \in [0;\infty)$;

4) $y = \sin x$, $y = \cos x$: $y \in [-1;1]$;

5) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \log_a x$: $y \in R$;

6) $y = a\sin x + b\cos x$: $y \in \left[-\sqrt{a^2+b^2};\sqrt{a^2+b^2}\right]$;

7) $y = a^x$: $y \in (0;\infty)$;

8) $y = \arcsin x$: $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

9) $y = \arccos x$: $y \in [0;\pi]$;

10) $y = \operatorname{arctg} x$: $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$;

11) $y = \operatorname{arcctg} x$: $y \in (0;\pi)$;

12) $y = x + \dfrac{1}{x}$: $y \in [2;\infty)$, если $x > 0$ и $y \in (-\infty;-2]$, если $x < 0$;

13) $a^2 + b^2 \geq 2ab$ для любых действительных a и b, причем $a^2 + b^2 = 2ab$, если $a = b$;

14) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для любых неотрицательных a и b, причем $\dfrac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$, если $a = b$.

Ограниченность

КОРИФЕЙ+
ИНТЕЛЛЕКТ ШКОЛА

Задача 1

Решить уравнение: $2\cos\frac{x}{3} = 5^{x} + 5^{-x}$

Задача 2

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение имеет хотябы одно решение

$$a^2 + 16|x| + 36\log_6(5x^2 + 6) = 6a + 3|5x - 6a|$$

Задача 3

Найдите все значения параметра а, при которых уравнение имеет хотя бы одно решение

$$\log_7\frac{14}{12x^2 - 12x + 5} = 2(x + a - 3)^2 + 4a^2 - 20a + 26$$

Инвариантность

Алгоритм

- Найти корень, который может давать единственность решения (нечётное количество решений)
- Подставить найденный корень в уравнение и найти значения параметра , соответствующие этому корню (необходимое условие, но не достаточное)
- Каждое из найденных значений параметра подставляем в исходное уравнение (систему, неравенства) и определяем количество решений (достаточное условие) уравнения (системы, неравенства)

Инвариантность.

КОРИФЕЙ+
ИНТЕЛЛЕКТ ШКОЛА

Задача 1

Найдите все значения параметра а, пр каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} a(x^2+2) = y - |x| + 5; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$$

Задача 2

Найдите все значения параметра а, пр каждом из которых система имеет единственное решение

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4z \\ x + y + 2z = 2a \end{cases}$$

На уроках

Область определения тригонометрических функций.

Найдите область определения функций

1) $y=\frac{1}{sinx-1}$;
2) $y=\frac{sinx}{cosx-\frac{\sqrt{2}}{2}}$;
3) $y=\frac{tgx}{sinx+\frac{\sqrt{3}}{2}}$;
4) $y=\frac{ctgx}{cosx+1}$;
5) $y=\frac{cosx}{sinx-\frac{\sqrt{2}}{2}}$;
6) $y=\frac{tgx}{ctgx-1}$;
7) $y=\frac{ctgx}{tgx+\sqrt{3}}$;
8) $y=\frac{2}{cosx+\frac{1}{2}}+\frac{3}{sinx+1}$;
9) $y=\frac{x}{sinx+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{x}{cosx-2}$;
10) $y=\frac{3}{tgx}-\frac{sinx}{ctgx}$;
11) $y=\sqrt{sinx-1}$;
12) $y=\sqrt{cosx+\frac{1}{2}}$;
13) $y=\sqrt{sinx+\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{cosx-\frac{\sqrt{3}}{2}}$;
14) $y=\sqrt{cosx+\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{sinx-\frac{\sqrt{3}}{2}}$;
15) $y=\frac{1}{\sqrt{cosx+1}}$;
16) $y=\frac{1}{\sqrt{tgx-1}}$;
17) $y=\frac{sinx-1}{cosx}+\sqrt{ctgx+\sqrt{3}}$;
18) $y=\frac{cosx}{sinx-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sqrt{cosx+\frac{1}{2}}$;
19) $y=\frac{\sqrt{ctgx-\frac{\sqrt{3}}{3}}}{\sqrt{sinx+\frac{\sqrt{3}}{2}}}$;
20) $y=\sqrt{cosx-1}+\sqrt{\pi^2-x^2}$
21) $y=\sqrt{-sinx-1}-\sqrt{9\pi^2-x^2}$
22) $y=\frac{3}{sinx-0,5}+\sqrt{1-x^2}$
23) $y=\frac{x}{tgx-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

Множество значений функции

Найти множество значений функции:

1) $y=3sinx-5$;
2) $y=4-3cos^2x$;
3) $y=cos^4x-sin^4x$;
4) $y=sin^2x+2sinx-1$;
5) $y=cos^2x+cosx-2$;
6) $y=sin^2x-2cosx+3$;
7) $y=cos^2x+4sinx-4$
8) $y=\frac{cosx+1}{2cosx-1}$;
9) $y=\frac{sinx+2}{sinx-3}$;

1) $y=tgx,\left[\frac{\pi}{4};\frac{2\pi}{3}\right]$
2) $y=cosx,\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{4}\right]$
3) $y=ctgx,\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$
4) $y=sinx,\left[\frac{\pi}{6};\frac{7\pi}{3}\right]$

Решить уравнения:

1) $\sqrt{1-(4x+5)^2}=1+cos^2\frac{2\pi x}{5}$
2) $(\sqrt{2}-sin2\pi x)(\sqrt{2}-sin2\pi x)=2+(2x-1)^2$
3) $4x^2-4x+3=(\sqrt{2}-sin2\pi x)\cdot(\sqrt{2}+sin2\pi x)$
4) $\sqrt{9-(4x+2)^2}=3+cos^2\pi x$

На уроках

КОРИФЕЙ+
ИНТЕЛЛЕКТ ШКОЛА

Чётность, нечётность тригонометрических функций

1. Исследуйте функции на чётность, нечётность:

1) $(x) = x^3 cosx$ 2) $f(x) = \frac{tgx}{x^5+x}$ 3) $f(x) = sinx + tgx + \frac{cosx}{x}$ 4) $f(x) = \sqrt{1 - sin^2x} + \lvert tgx \rvert - x^2$	1) $f(x) = x^3 sinx + ctg^4 x - 2tgx \cdot ctgx$ 2) $f(x) = sin^2x + cos^2x + \frac{1}{sin^2x} - \sqrt{x^2}$ 3) $f(x) = x^4 + tgx - ctgx$

2. Постройте график функции y=f(x), если известно, что функция f(x) – нечётная и при $x \geq 0$ она совпадает с графиком функции $g(x) = 2\sin(2x)$
3. Постройте график функции y=f(x), если известно, что функция f(x) – чётная и при $x \geq 0$ она совпадает с графиком функции $g(x) = 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$.
4. Постройте график функции y=f(x), если известно, что функция f(x) –чётная и при $x \leq 0$ она совпадает с графиком функции $g(x) = 2sin(2x - \frac{\pi}{3})$.

Периодичность функций

1. Найдите наименьший положительный период функции:

1) $y = tg(2x);$

2) $y = 2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + ctg(5x).$

3) $y = ctg(3x);$

4) $y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + ctg\left(\frac{1}{3}x\right)$

1. Периодическая функция y=g(x) определена на всей числовой прямой. Его период равен 3 и g(2)=-4, g(3)=7. Найдите 2g(17)+g(21).
2. Периодическая функция y=g(x) определена на всей числовой прямой. Его период равен 4 и g(1)=-4, g(5)=7. Найдите 2g(45)+g(21).Вычислить: 1) $tg\frac{21\pi}{4} - cos\frac{311\pi}{3}$ 2) $\sin 810^0 - 2cos540^0$ 3) $ctg\frac{31\pi}{6} - sin\frac{214\pi}{3}$ 4) $\sin 750^0 - 2cos450^0$.

КОРИФЕЙ

Спасибо за внимание