

Нахождение углов в пространстве

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $KM \perp AC$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 6$, $AC = 8$ и $AA_1 = 3$.

$$\text{Ответ б) } \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{14}} = \arcsin \frac{\sqrt{70}}{21} = \arccos \frac{\sqrt{43}}{3\sqrt{7}}$$

1 способ построения линейного угла

Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 4$, $BC = 4\sqrt{2}$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB .

а) Докажите, что P — середина отрезка BQ .

б) Найдите угол между плоскостями SBA и SBC , если $SD = 8$.

$$\text{Ответ } \arccos \frac{1}{\sqrt{105}}$$

2 способ построения линейного угла

В основании прямой призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 5$ и $BC = 3$. Точка M делит ребро $A_1 D_1$ в отношении $A_1 M : MD_1 = 2 : 3$, а точка K — середина ребра DD_1 .

а) Докажите, что плоскость MKC параллельна прямой BD .

б) Найдите тангенс угла между плоскостью MKC и плоскостью основания призмы, если $\angle MKC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$.

$$\text{Ответ: б) } \frac{\sqrt{19}}{3}.$$

Расстояния

1. От точки до прямой

Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$.

а) Докажите, что сечение пирамиды, проходящее через середину ребра AD и точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT .

2. От точки до плоскости

В пирамиде $ABCD$ рёбра DA , DB и DC попарно перпендикулярны, а $AB = BC = AC = 6\sqrt{2}$.

а) Докажите, что эта пирамида правильная.

б) На рёбрах DA и DC отмечены точки M и N соответственно, причём $DM : MA = DN : NC = 1 : 2$. Найдите расстояние от точки D до плоскости MNB .

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{19}}$

3. Между скрещивающимися прямыми

Построение общего перпендикуляра

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AB = 5$, $AA_1 = 5$, $AD = 3$.

а) Докажите, что прямые $A_1 B$ и $B_1 D$ перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми $A_1 B$ и $B_1 D$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ все рёбра равны 1.

а) Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1 .

б) Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1 .

Ответ: б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Проектирование на плоскость, перпендикулярную одной из прямых

В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ рёбра равны 1. На продолжении отрезка $A_1 C_1$ за точку C_1 отмечена точка M так, что $A_1 C_1 = C_1 M$, а на продолжении отрезка $B_1 C$ за точку C отмечена точка N так, что $B_1 C = CN$.

а) Докажите, что $MN = MB_1$.

б) Найдите расстояние между прямыми $B_1 C_1$ и MN .

Ответ $\frac{2}{\sqrt{5}}$