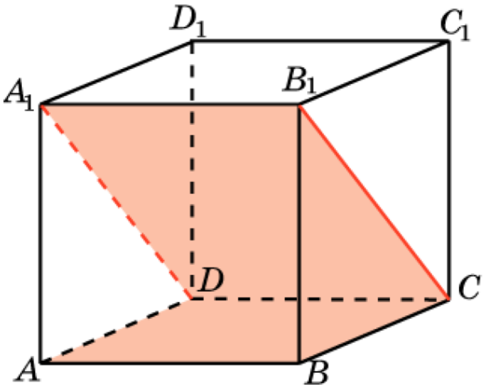
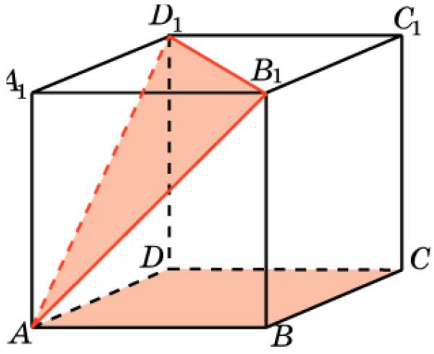
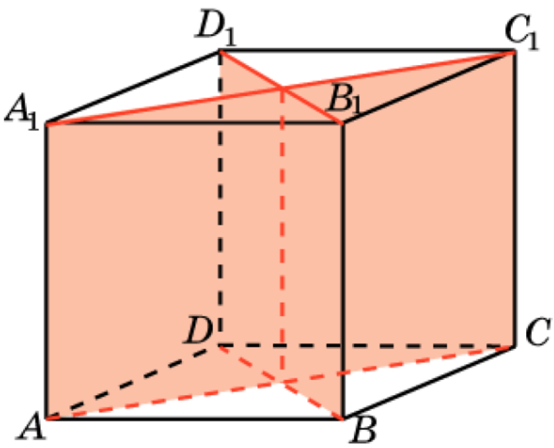
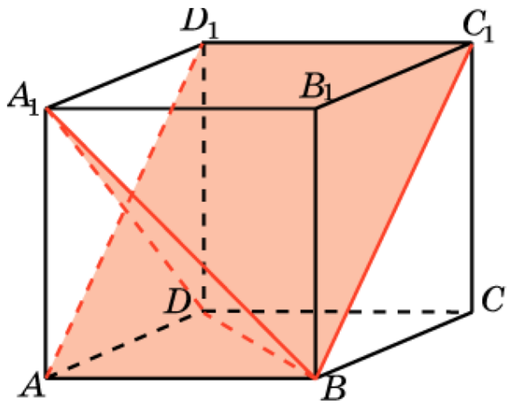
Нахождение углов между плоскостями:

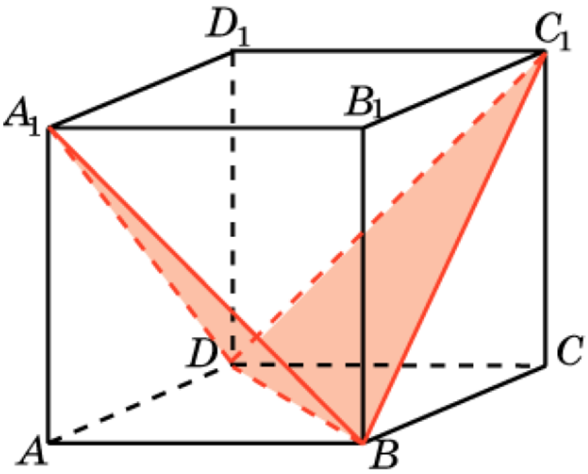
В кубе

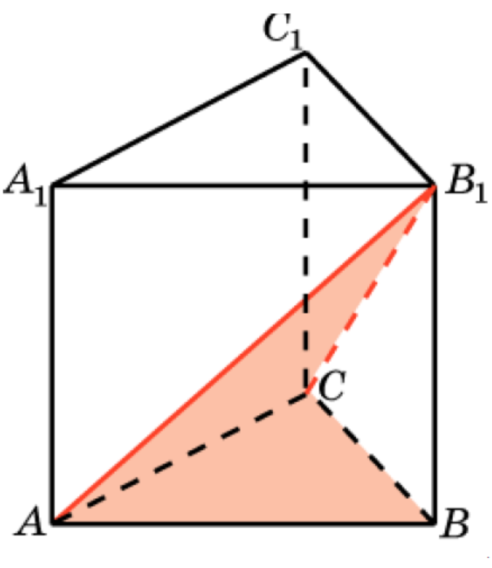


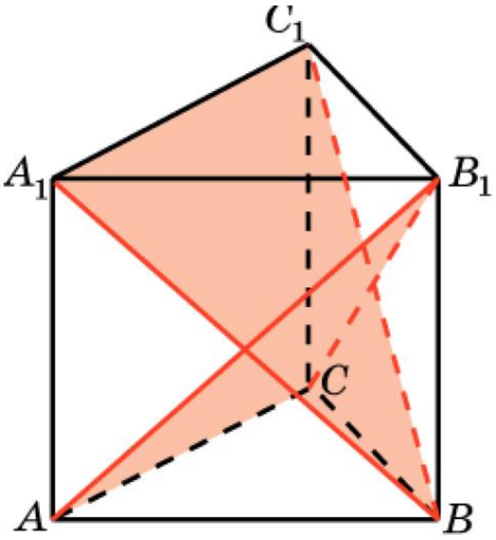


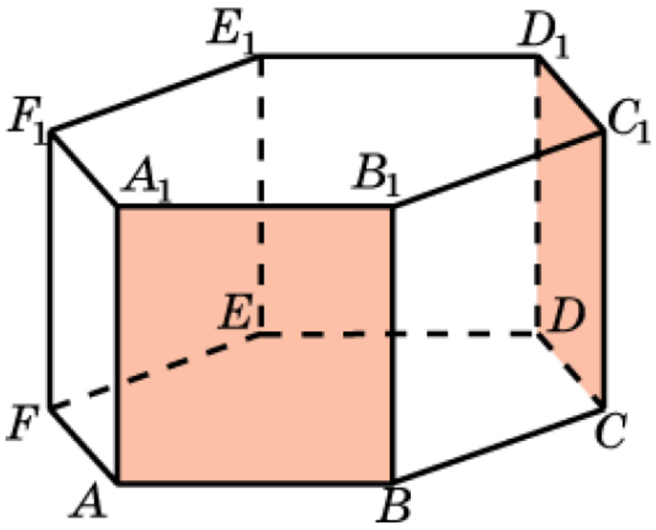


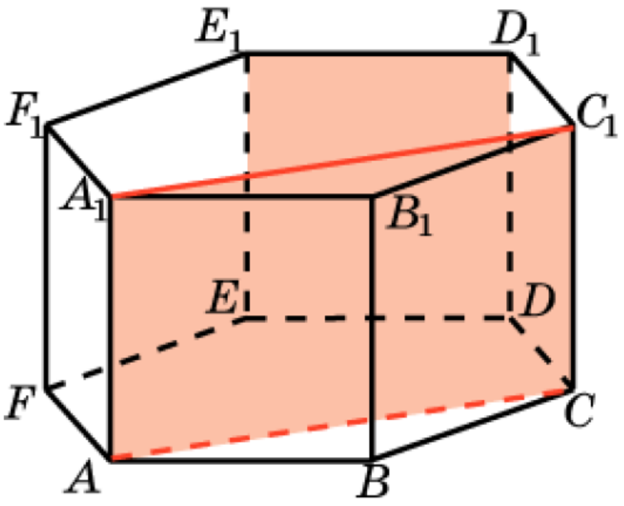


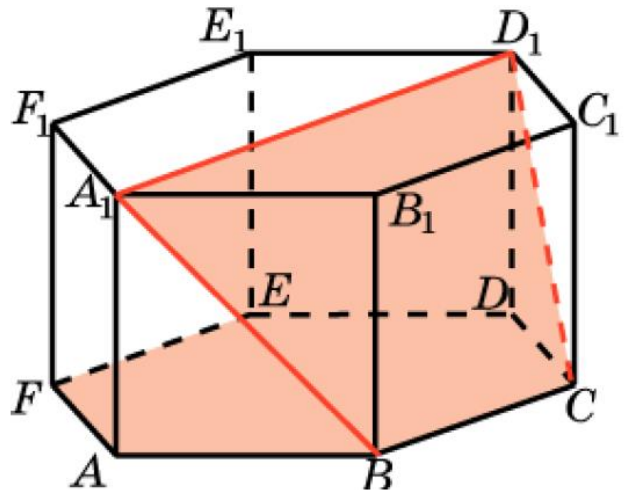


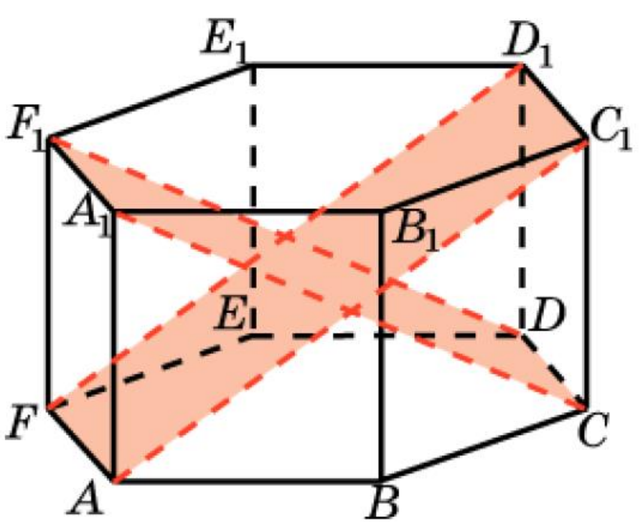


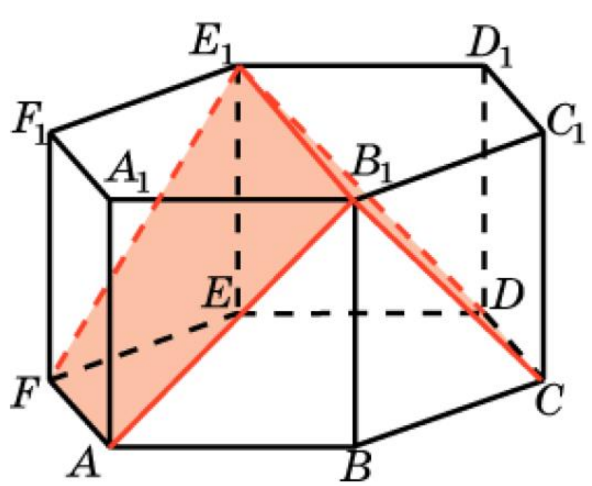

C_1
A_1
B_1
C
A
B


E_1
D_1
F_1
C_1
A_1
B_1
E
D
F
C
A
B


E_1
D_1
F_1
C_1
A_1
B_1
E
D
F
C
A
B


E_1
D_1
F_1
C_1
A_1
B_1
E
D
F
C
A
B


E_1
D_1
F_1
C_1
A_1
B_1
E
D
F
C
A
B


E_1
D_1
F_1
C_1
A_1
B_1
E
D
F
C
A
B

2. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Точки K и M — середины рёбер BD и CD соответственно. Найдите углы между плоскостями: а) AKC и ABD; б) AMB и ABC; в) AKM и ABC;

3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Все рёбра пирамиды равны, E — середина бокового ребра SC. Найдите углы между плоскостями: а) SAD и SBC; б) ABC и SCD; в) ABC и BDE; г) BSC и DSC; д) ABE и ABC.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. Боковое ребро вдвое больше стороны основания. Найдите углы между плоскостями: а) SBC и SEF; б) SAF и SBC; в) ABC и SEF; г) SBD и ABC.

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Отв $\boldsymbol{arctg\frac{\sqrt{17}}{4}}$

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC.

а) Докажите, что прямые SB и MK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 8$, $SC = 6$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. Это расстояние удобно находить как высоту какого-то треугольника. Высота треугольника равна его удвоенной площади, делённой на основание. В частности, если треугольник прямоугольный, то его высота, опущенная на гипотенузу, равна произведению катетов, делённому на гипотенузу.

Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. При вычислении этого перпендикуляра удобно использовать следующие простые соображения.

1. Расстояние от точки до плоскости не изменится, если эту точку сместить вдоль любой прямой, параллельной плоскости.

2. Если точки B и C лежат на прямой, пересекающей плоскость в точке A, то расстояния от точек B и C до плоскости относятся как $BA : CA$. В частности, если C — середина наклонной AB, то расстояние от точки C до плоскости вдвое меньше расстояния до этой плоскости от точки B, а если A — середина отрезка BC, то точки B и C равноудалены от плоскости.

1. Дан единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите расстояния: а) от точки B до прямой DA_1; б) от точки A до прямой BB_1; в) от точки B_1 до прямой DA_1; г) от точки A до плоскости CB_1D_1; д) от точки A до плоскости BDC_1; е) от точки B до плоскости AB_1D_1; ж) от точки B до плоскости DA_1C_1.

2. Рёбра правильного тетраэдра $ABCD$ равны 1. Точка P — середина ребра AB. Найдите расстояния: а) от точки P до прямой CD; б) от точки A до плоскости BCD; в) от точки P до плоскости ADC; г) от центра грани ABC до плоскости BCD.

3. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S равны 1. Точка E — середина бокового ребра SC. Найдите расстояния: а) от точки A до прямой SC; б) от точки E до прямой AB; в) от точки E до прямой BD; г) от точки A до плоскости BSD; д) от точки S до плоскости BED.

4.3. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.

а) Докажите, что плоскость CA_1F_1 делит ребро BB_1 пополам.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой A_1F_1, если стороны основания призмы равны 5, а боковые рёбра равны 11.

4.4. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S.

а) Докажите, что плоскость α, проходящая через ребро AB и середину ребра SE, делит ребро SC в отношении $2:1$, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние от точки S до плоскости α, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен 60°.

4.5. Основание пирамиды $DABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Высота пирамиды проходит через середину ребра AC, а боковая грань ACD — равносторонний треугольник.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро BC и произвольную точку M ребра AD, — прямоугольный треугольник.

б) Найдите расстояние от вершины D до этой плоскости, если M — середина ребра AD, а высота пирамиды равна 6.

§4. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости

Подготовительные задачи

1. а) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; б) 1; в) 1; г) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

3. а) 1; б) $\frac{\sqrt{11}}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{1}{2}$.

4.1. $\sqrt{5}$. **4.2.** $\frac{60}{17}$. **4.3.** 14. **4.4.** 3. **4.5.** $2\sqrt{3}$. **4.6.** 2. **4.7.** 4.

Углы ответы

1. а) 90°; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; в) $\arccos\frac{1}{3}$; г) 60°. **2.** а) 90°; б) $\operatorname{arcctg}\sqrt{2}$; в) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{2}}{5}$.

3. а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) 45°; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4. а) 90°; б) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{1}{7}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3}$. **5.** а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$; б) 60°; в) 60°; г) 30°. **6.** а) $\arccos\frac{3}{5}$; б) $\arccos\frac{1}{5}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$; г) $\operatorname{arctg}2\sqrt{3}$.