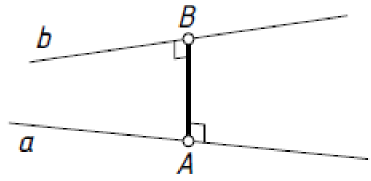
Расстояние между скрещивающимися прямыми

Общим перпендикуляром скрещивающихся прямых a и b называется отрезок, концы A и B которого лежат на прямых a и b соответственно и который перпендикулярен обеим прямым.



В школьном курсе стереометрии доказывается, для любых двух скрещивающихся прямых существует общий перпендикуляр, и притом только один, а расстояние между этими прямыми равно длине их общего перпендикуляра.

Вот несколько способов вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми a и b.

1. Через точку A прямой a проводится прямая b', параллельная b. Тогда расстояние между прямыми равно расстоянию от любой точки B прямой b до плоскости, проходящей через пересекающиеся прямые a и b'.

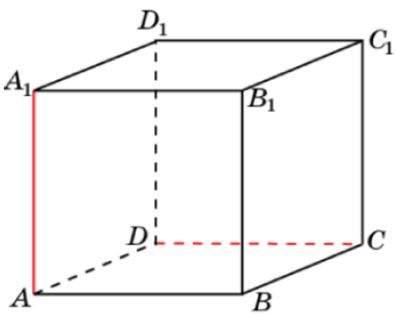
2. Построение общего перпендикуляра и вычисление его длины.

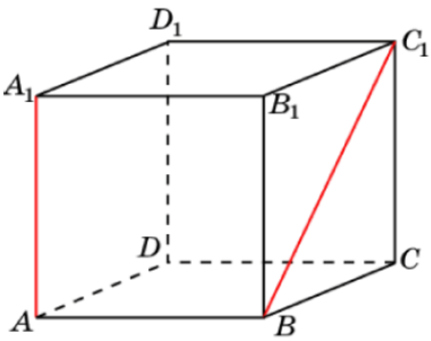
3. Вычисление расстояния между двумя параллельными плоскостями, содержащими прямые a и b соответственно.

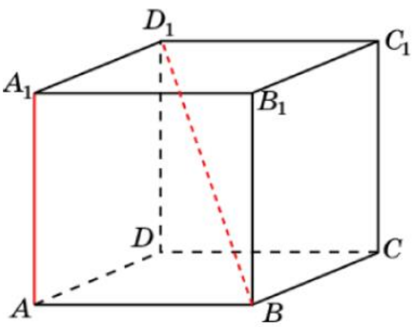
4. Применение формулы для объёма тетраэдра: $V = \frac{1}{6}abh\sin\alpha$, где V — объём тетраэдра, a и b — длины его противолежащих рёбер, h — расстояние между прямыми, содержащими эти рёбра, α — угол между этими прямыми.

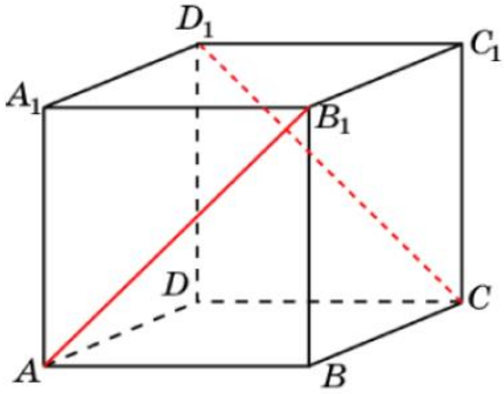
5. Метод координат

В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми

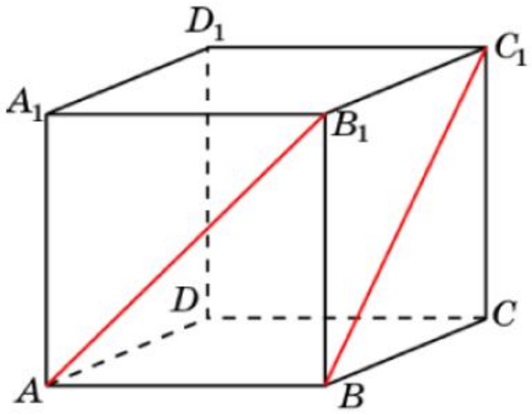




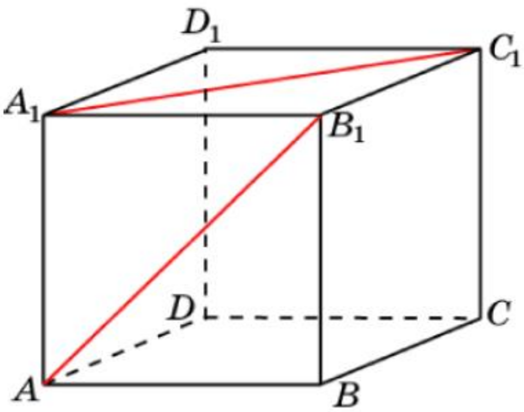




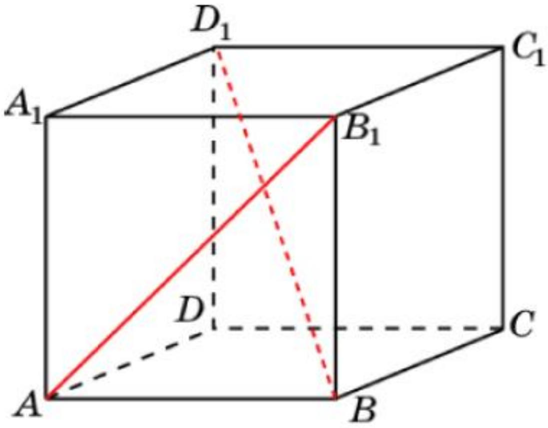
D_1
C_1
A_1
B_1
D
C
A
B



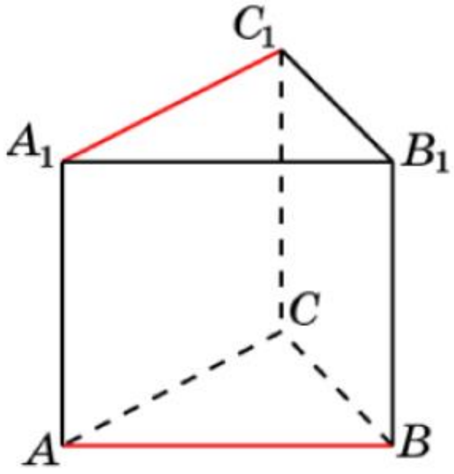
D_1
C_1
A_1
B_1
D
C
A
B



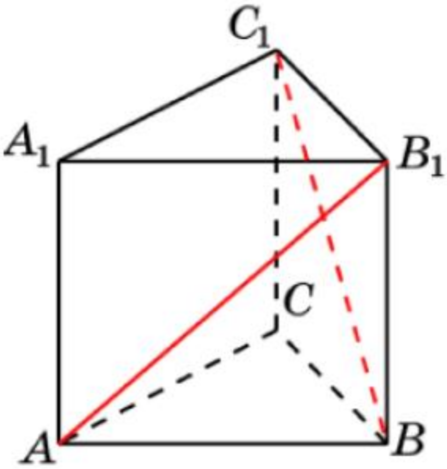
D_1
C_1
A_1
B_1
D
C
A
B



D_1
C_1
A_1
B_1
D
C
A
B



C_1
A_1
B_1
C
A
B



C_1
A_1
B_1
C
A
B

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 5$, $AA_1 = 5$, $AD = 3$.

а) Докажите, что прямые A_1B и B_1D перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми A_1B и B_1D.

Ответ: $\dfrac{15\sqrt{118}}{118}$.

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка K — середина ребра AB, точка E лежит на ребре CD и $EC : ED = 1 : 2$.

а) Найдите угол между прямыми BC и KE.

б) Найдите расстояние между прямыми BC и KE, если ребро тетраэдра равно $\sqrt{6}$.

Ответ: а) $\arccos\dfrac{7\sqrt{19}}{38}$; б) $\dfrac{2}{3}$.

3. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1.

а) Докажите, что точки F и C равноудалены от плоскости BED_1.

б) Найдите расстояние между прямыми ED_1 и FE_1.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

4. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 15$ и $BC = 25$. Боковые ребра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На ребрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK = CN = 8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.

б) Найдите расстояние между прямыми SD и KM.

Ответ: б) $\dfrac{5\sqrt{17}}{2}$.

Объемы:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD = 12$, $AB = 5$, $AA_1 = 8$.

а) Докажите, что плоскость BDA_1 делит объем параллелепипеда в отношении 1:5.

б) Найдите объем пирамиды MB_1C_1D, если M — точка на ребре AA_1, причем $AM = 5$.

Ответ: 50

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания 12 и высотой 3. Точка K — середина BC, точка L лежит на стороне A_1B_1 так, что $B_1L = 5$. Точка M — середина A_1C_1. Через точки K и L проведена плоскость таким образом, что она параллельна прямой AC.

а) Докажите, что указанная выше плоскость перпендикулярна прямой MB.

б) Найдите объем пирамиды с вершиной в точке B, у которой основанием является сечение призмы плоскостью.

Ответ: $\dfrac{33\sqrt{3}}{2}$.

На рёбрах AB и BC треугольной пирамиды $ABCD$ отмечены точки M и N соответственно, причём $AM : BM = CN : NB = 1 : 2$. Точки P и Q — середины ребер DA и DC соответственно.

а) Докажите, что P, Q, M и N лежат в одной плоскости.

б) Найти отношение объёмов многогранников, на которые плоскость PQM разбивает пирамиду.

Ответ:13: