Дударева Н.В. УрГПУ

Координатный (Векторно-координатный) метод решения геометрических задач ЕГЭ

Этапы решения геометрических задач координатным методом

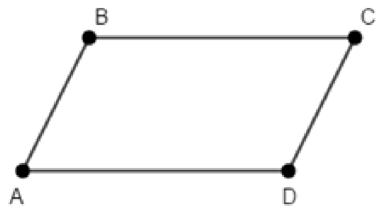
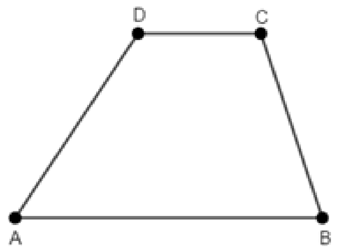
1. Ввести систему координат удобным образом (исходя из свойств заданной фигуры).
2. Записать условие задачи в координатах, определив во введенной системе координат координаты точек и/или векторов.
3. Используя алгебраические преобразования, решить задачу.
4. Интерпретировать полученный результат в соответствии с условием данной задачи.

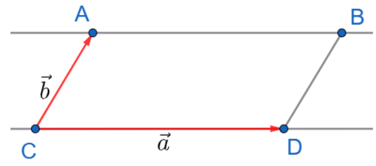
Таблица перевода с геометрического языка на векторный язык и на язык координат (табл. 1).

Таблица 1.

Перевод с геометрического языка на векторный язык и язык координат

<table>
<tr><th colspan="2">Геометрические факты</th><th>На векторном языке</th><th>На языке координат</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Три точки A, B, C лежат на одной прямой</td><td>$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$</td><td>1. Написать уравнение прямой АВ
2. Проверить, удовлетворяют ли координаты точки С уравнению прямой АВ</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Точка M делит отрезок $[AB]$ в отношении λ, то есть $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$</td><td colspan="2">$\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC}$</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Точка M – середина отрезка $[AB]$</td><td>$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$</td><td>$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Точка M принадлежит отрезку $[AB]$</td><td colspan="2">$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AC},\ 0 \le t \le 1$</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Точка M принадлежит лучу $[AB)$</td><td colspan="2">$\overrightarrow{AM} = t \cdot \overrightarrow{AC},\ t \ge 0$</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Точки A, B, C образуют треугольник или точки A, B, C не коллинеарны</td><td>$\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$</td><td>Соответствующие координаты векторов не пропорциональны</td></tr>
</table>

8.	Точка М – точка пересечения медиан треугольника АВС	$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$	$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$
9.	Точки *A*, *B*, *C*, *D* образуют параллелограмм		$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AD} \end{cases},$
10.	Четырехугольник *ABCD* является прямоугольником	$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \end{cases},$	
11.	Четырехугольник *ABCD* является квадратом	$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \\ \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \lvert\overrightarrow{AC}\rvert \end{cases}$, или $\begin{cases} \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \lvert\overrightarrow{BD}\rvert \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$	
12.	Четырехугольник *ABCD* является ромбом	$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases},$	
13.	Четырехугольник *ABCD* является трапецией		$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{BC} \nparallel \overrightarrow{AD} \end{cases},$
14.	Четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат в одной плоскости или точки *A*, *B*, *C*, *D* компланарны или $A \in (BCD)$	$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ компланарны, т.е один из векторов можно выразить через 2 других: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + \beta \cdot \overrightarrow{AD}$	Составить уравнение плоскости, проходящей через 3 точки и проверить принадлежность 4 точки этой плоскости
15.	1) Площадь параллелограмма 2) площадь треугольника	1) $S_{\vec{a},\vec{b}} = \lvert[\vec{a},\vec{b}]\rvert$ 2) $S_{\vec{a},\vec{b}} = \frac{1}{2} \cdot \lvert[\vec{a},\vec{b}]\rvert$	
16.	Высота параллелограмма (треугольника), расстояние между параллельными прямыми	$h = \frac{\lvert[\vec{a},\vec{b}]\rvert}{\lvert\vec{a}\rvert}$	1. Составить уравнения прямых 2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку А на одной из прямых перпендикулярно к прямым

			3. Найти точку B пересечения плоскости со 2 прямой 4. Найти расстояние между точками A и B
17.	Объем 1) параллелепипеда, 2) треугольной призмы, 3) тетраэдра	1) $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = \left|[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\right|$ 2) $V_{\text{пр}} = \frac{1}{2}\left|[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\right|$ 3) $V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6}\left|[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\right|$	
18.	Высота параллелепипеда, расстояние между скрещивающимися прямыми l и m	$h = \dfrac{\left|[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}\right|}{\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|}$	1. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую l параллельно прямой m 2. Найти расстояние от какой-либо точки прямой m до плоскости.
19.	Угол между прямыми AB и CD	$\cos\angle(AB,CD) = \left|\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})\right|$	
20.	Угол между плоскостями α и β	$\cos\angle(\alpha,\beta) = \left|\cos\angle(\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta)\right|$, где $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$, $\vec{n}_\beta \perp \beta$	
21.	Угол между прямой m и плоскостью α	$\sin\angle(m,\alpha) = \left|\cos\angle(\vec{m},\vec{n}_\alpha)\right|$, где $\vec{n}_\alpha \perp \alpha$, $\vec{m}$ – направляющий вектор прямой	
22.	Прямая AB и плоскость α параллельны	1. Составить уравнение плоскости α: $ax+by+cz+d=0$ 2. Найти направляющий вектор прямой AB – вектор $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ 3. Применить критерий параллельности параллельности вектора и плоскости: $a\cdot m_1 + b\cdot m_2 + c\cdot m_3 = 0$	

Открытый банк

Сторона основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ относится к боковому ребру как $1:\sqrt{2}$. Через вершину D проведена плоскость α, перпендикулярная боковому ребру SB и пересекающая его в точке M.

а) Докажите, что M - середина SB.

б) Найдите расстояние между прямыми AC и DM, если высота пирамиды равна $6\sqrt{3}$.

Ященко 36 вариантов

В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания ABC равна $2\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах AA_1, BB_1 и A_1C_1 соответственно отмечены точки N, K и P так, что $AN : NA_1 = B_1K : KB = C_1P : PA_1 = 2 : 1$. Плоскость KNP пересекает ребро B_1C_1 в точке F.

а) Докажите, что точка F - середина ребра B_1C_1.

б) Найдите расстояние от точки F до плоскости CNK.

Основанием правильной треугольной пирамиды $PABC$ является треугольник ABC, $AP : AB = 3 : 4$. На апофеме грани BCP отметили точку K, которая делит эту апофему в отношении $1 : 4$, считая от точки P. Через точки A и K параллельно прямой BC проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α перпендикулярна апофеме грани BCP.

б) Найдите угол между прямой AC и плоскостью α.

В правильной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ на ребре CC_1 отметили точку K так, что $CK : KC_1 = 3 : 1$. Через точки K и D_1 параллельно прямой DF_1 провели плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α пересекает ребро B_1C_1 в такой точке N, что $B_1N : NC_1 = 1 : 2$.

б) Найдите угол между плоскостями EFF_1 и α, если $AB = \sqrt{10}, AA_1 = 4$.

Дополнительно:

а) Найти угол и расстояние между прямыми KD_1 и DF_1

б) Найти угол между прямой ЕК и плоскостью α