Работа №2.

1) $6\sin x - 1 = \sqrt{5\sin x + 3\cos 2x}$ ОДЗ: $5\sin x + 3\cos 2x \geq 0$

$\Downarrow$

$36\sin^2 x - 12\sin x + 1 = 5\sin x + 3\cos 2x$

$3\cos 2x = 3(1 - 2\sin^2 x) = 3 - 6\sin^2 x$

$42\sin^2 x - 17\sin x - 2 = 0$

$t = \sin x$

$42t^2 - 17t - 2 = 0$

$D = 17^2 + 4\cdot 2\cdot 42 = 289 + 336 = 625$

$t = \frac{17 \pm 25}{84}$ $t_1 = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$ $t_2 = -\frac{8}{84} = -\frac{2}{21} = -\frac{2}{21}$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \\ x = (\pi - \arcsin\frac{1}{2}) + 2\pi k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\sin x = -\frac{2}{21}$

$\left[\begin{array}{l} x = -\arcsin\frac{2}{21} + 2\pi n \\ x = (\pi + \arcsin\frac{2}{21}) + 2\pi n \end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$

~~Прим. т.к. arcsin x ∈ [~~

~~для arcsin x $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$~~

$|\cos x_2| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{\sqrt{437}}{21}$

Проверка корней по ОДЗ:

1) $5\underbrace{\sin\frac{\pi}{6}}_{>0} + 3\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{>0} \geq 0$ ✓

2) $5\underbrace{\sin\frac{5\pi}{6}}_{>0} + 3\underbrace{\cos\frac{10\pi}{6}}_{>0} \geq 0$ ✓

~~3) $5\underbrace{\sin(-\arcsin\frac{2}{21})}_{<0} + 3\underbrace{\cos(2\arcsin\frac{2}{21})}_{>0} \geq 0$~~

~~$-5\cdot\frac{2}{21} + 3(1 - 2\sin^2(-\arcsin\frac{2}{21})) \geq 0$~~

~~$-\frac{10}{21} + \ldots$~~

Проверка: Заменим $t = \sin x$ в первоначальном уравнении.

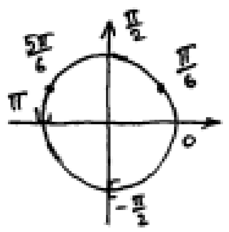
$6t - 1 = \sqrt{5t + 3(1 - 2t^2)}$

$t = \frac{1}{2}$ $3 - 1 = \sqrt{2{,}5 + 1{,}5}$ $2 = \sqrt{4}$ $t = \frac{1}{2}$ явл. корнем

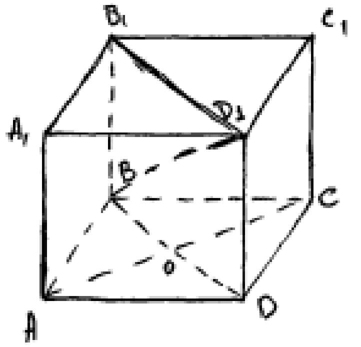
Значит, и $\left[\begin{array}{l} x = \cancel{\arcsin}\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$ являются корнями.

$t = -\frac{2}{21}$ $-1 - \frac{6\cdot 2}{21} = \sqrt{\ldots}$. Корень (арифметич.) не может быть отрицательным. Поэтому $t = -\frac{2}{21}$ не явл. корнем.

б)



Ответ: а) $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right.$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.



№13.

Дано: $AB \ldots C_1D_1$ — прямоуг. парал-д; $ABCD$ — квадрат;

б) $AB = 6$; $AA_1 = 16$.

а) Д-ть: $AC \perp BD_1$.

б) Найти: $\rho(AC; BD_1)$.

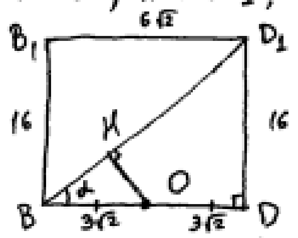
а) Д-во:

По св-ву квадрата, $AC \perp BD$. BD — проекция BD_1 на пл-ть (ABC).

По теор. о $3^х$ $\perp$-ах, $AC \perp BD_1$. Ч. т. д.

б) $DD_1 \perp (ABC) \Rightarrow DD_1 \perp AC$. Т.к. $AC \perp BD$, $AC \perp DD_1$, $AC \perp (BD_1D)$

Рассмотрим п-ть (B_1D_1D):



т. O — сер BD (св-во квадр.)

$OH \perp BD_1$. OH — искомое расст-е.

$BB_1 = AA_1 = 16$, $BD = \sqrt{2}\,AB = 6\sqrt{2}$ (т. Пиф., $AB = CB$)

$BD_1 = \sqrt{2 \cdot 36 + 256} = 2\sqrt{82}$

$\Delta BOH \sim \Delta BDD_1$ ($1^е$ признак). $\frac{OH}{DD_1} = \frac{BO}{BD_1}$. $\frac{OH}{16} = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{82}}$

$OH = \frac{16 \cdot 3\sqrt{2}}{2\sqrt{82}} = \frac{8 \cdot 3}{\sqrt{41}} = \frac{24}{\sqrt{41}}$

Ответ: $\frac{24}{\sqrt{41}}$.

№14.

$$\frac{x^2+16}{\log_4(x^2-6x+9)}+\frac{4x}{\log_4(3-x)}\leqslant 0$$

ОДЗ: $3-x>0 \qquad x<3.$

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

$$\log_4(x-3)^2=2\log_4|x-3|\xrightarrow{\text{ОДЗ}}2\log_4(3-x)$$

$$\frac{x^2+16}{2\log_4(3-x)}+\frac{4x^2}{\log_4(3-x)}\leqslant 0$$

$$\frac{x^2+8x+16}{2\log_4(3-x)}\leqslant 0$$

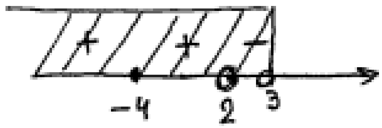
Нули числителя: $x^2+8x+16=0$

$(x+4)^2=0$

$x=-4$

Нули знаменателя: $2\log_4(3-x)=0$

$3-x=1 \qquad x=2$



Ответ: $x\in(3;2)\cup\{-4\}$

№15.

	начало	рост	итог
1.	S	~~$(1+r)S$~~ rS	$S+30000$
2.	$S+30000$	$r(S+30000)$	$S+618000$
3.	$S+61800$	$r(S+61800)$	?

$$\begin{cases}(\cancel{1}+r)S=\cancel{S}+30'000\\(1+r)(S+30000)=S+61800\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}rS=30000 & (1)\\rS+r\cdot 30\,000=31800 & (2)\end{cases}$$

Из (2): $r=\dfrac{31800-30\,000}{30000}=\dfrac{1800}{300\,00}=\dfrac{6}{100}=0,06$

$$S=\frac{30\,000}{r}=\frac{3\,000\,000}{6}=500\,000$$

$$(1+r)(S+61800)=1,06\cdot 561800=106\cdot 5618=595\,508$$

Ответ: 595508 рублей.

№ 17.

$x + \sqrt{6a - x^2} = \sqrt{2ax + 6a}$ 1 к. $a - ?$

ОДЗ: $\begin{cases} 6a - x^2 \geq 0 \\ a(2x+6) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq 0 \\ x \leq -3 \end{cases} \end{array}\right.$ $a \geq \frac{x^2}{6}$

$x = \sqrt{2ax + 6a} + \sqrt{6a - x^2}$

$\Downarrow$

$x^2 = 2ax + 6a + 6a - x^2 - 2\sqrt{(2ax+6a)(6a - x^2)}$ $/ : 2$

$x^2 - ax - 6a = -\sqrt{- \cdot -}$

$\Downarrow$

$x^4 + a^2x^2 + 36a^2 - 2ax^3 - 12ax^2 + 12a^2x = 12a^2x - 2ax^3 + 36a^2 - 6ax^2$

$x^4 + a^2x^2 - 6ax^2 = 0$

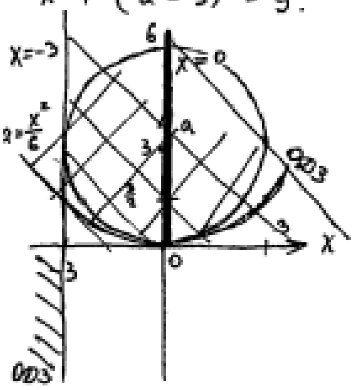
$x^2(x^2 + a^2 - 6a) = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$ Пров-ка: $0 + \sqrt{6a} = \sqrt{6a}$

$x = 0$ является корнем при $a \geq 0$.

$x^2(x^2 + a^2 - 6a) = 0$ $/ : x^2 \neq 0;\ + 9$

$x^2 + a^2 - 6a + 9 = 9$

$x^2 + (a-3)^2 = 9.$



Множество корней — окружность с центром в $(0;3)$, $r = 3$; прямая $x = 0$ на ~~промеж~~ интервале $a \geq 0$.

~~Т.к. график симметричен отн-но Оа, на ОДЗ нужно достаточно проверить лишь 1ю четверть. (x ≥ 0, a ≥ 0)~~

$\begin{cases} x^2 + (a-3)^2 = 9 \\ a \geq \frac{x^2}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 - a^2 + 6a - 9 \\ x^2 \leq 6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = -a^2 + 6a \\ -a^2 + 6a \leq 6a \end{cases}$

$-a^2 \leq 0$ верно для любого $a \in R$. Значит, весь график удовлетворяет ОДЗ.

При $a=0$ 1 корень,

При $0<a<6$ 3 корня;

При $a \geqslant 6$ 1 корень;

При $a<0$ корней нет.

Ответ: $a \in \{0\};[6;+\infty)$

№18.

а) 60, 70, a. $a>70$.

Важно проверить, будет ли выполняться условие "число хотя бы на 8 больше трети суммы 2-х других" для наименьшего. Если условие справедливо для минимума, оно справедливо и для всех остальных, ведь при проверке другого числа значение суммы уменьшится, а самого числа — увеличится.

Поэтому достаточно проверить: $60 \geqslant \frac{70+a}{3}+8 \quad |\cdot 3$

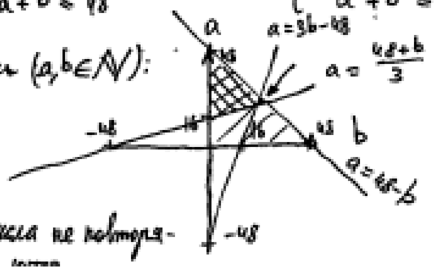
$156 \geqslant 70+a$ $\qquad a \leqslant 86$

Итак, возможны след. варианты a: 71, 72, 73, 74, ..., 85, 86. Всего — 16.

~~Ответ: 16~~ б) a, b, 24.

$$\begin{cases} a-8 \geqslant \frac{24+b}{3} \\ b-8 \geqslant \frac{24+a}{3} \\ 16 \geqslant \frac{a+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{b}{3} \geqslant 16 \\ b-\frac{a}{3} \geqslant 16 \\ a+b \leqslant 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a-b \geqslant 48 \\ 3b-a \geqslant 48 \\ a+b \leqslant 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant \frac{48+b}{3} \\ a \leqslant 3b-48 \\ a \leqslant 48-b \end{cases}$$

Решим систему графически ($a,b \in \mathbb{N}$):



Обнаружено пересечение:

$\frac{48+b}{3}=3b-48$

$64=\frac{8}{3}b$ $\qquad b=24$. Но числа не повторяются

Найдём верхнюю границу b:

$$\frac{48+b}{3} = 48-b \quad |\cdot 3$$

$$48+b = 144-3b$$

$4b = 96 \qquad b = 24.$ b не может быть больше 24.

~~Найдём т~~ b может быть только 24. Поэтому "удачных" троек, где одно из чисел — 24, быть не может.

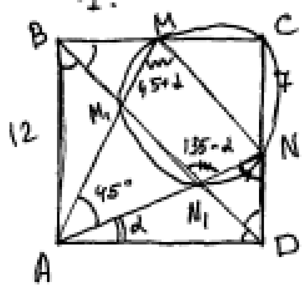
в) —

Ответ: а) 16; б) нет; в) —.

№ 16.

Дано: ABCD — квадрат, $\angle MAN = 45^\circ$; $BD \cap AM = M_1$, $BD \cap AN = N_1$; б) $AB=12$, $CN=7$.

б) Найти: диаметр γ_1, описанной около M_1MCNN_1.



Решение:

$\angle C$ — впис., $\angle C = 90^\circ \Rightarrow MN$ — диаметр.

Пусть $\angle NAD = \alpha$

$\angle AND = 90^\circ - \alpha \qquad \angle NN_1D = 180^\circ - 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = 45^\circ + \alpha$

$\angle NN_1B = 135^\circ - \alpha. \qquad \angle M_1MN = 45+\alpha$ (св-во опис. окр.)

$\angle BAM = 45-\alpha \qquad \angle AMB = 45+\alpha \qquad \angle NMC = 180 - 2(45+\alpha) = 90 - 2\alpha$

$\angle MNC = 2\alpha \qquad \sin\alpha = \frac{ND}{AN} = \frac{5}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{5}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13}$

$$MN = \frac{CN}{\cos 2\alpha} = \frac{7}{1-2\sin^2\alpha} = \frac{7}{1-\frac{50}{169}} = \frac{169\cdot 7}{119} = \frac{169}{17}$$

Ответ: б) $\frac{169}{17}$