**Работа №3.**

№15. Пусть $x$ – сумма вклада изначально, а $y$ – процент вклада, составим таблицу по условию:

I год $(x+30)$ - накоплено $\quad x\cdot(1+y)=x+30$ – каким образом накоплено

II год $(x+30+31,8)$ $\quad (x+30)\cdot(1+y)=x+61,8$

система:

$$\begin{cases} x(1+y)=x+30 \\ (x+30)(1+y)=x+61,8 \end{cases}$$

, выразим $x$: $xy=30 \Rightarrow x=\frac{30}{y}$, тогда

$$\left(\frac{30}{y}+30\right)(1+y)=\frac{30}{y}+61,8$$

$$\frac{30}{y}+30+30+30y-\frac{30}{y}=61,8$$

$$30y=61,8-30-30$$

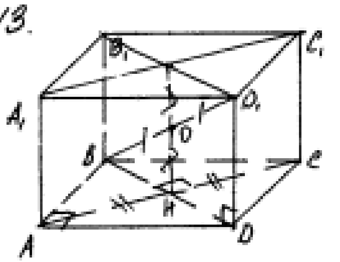
$30y=1,8 \Rightarrow y=0,06 \Rightarrow$ вклад под 6% годовых

Первоначал. сумма: $x=\frac{30}{0,06}=500$

III год: $\underbrace{(500+61,8)}_{\text{сумма на начало года}}\cdot\underbrace{1,06}_{\text{процент}}=595,508 \Rightarrow$ на счете 595 508 руб.

Ответ: 595508 рублей.

№13.




Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед

$ABCD$ – квадрат

$AB=8$, $AA_1=16$

а) Доказать: $BD_1\perp AC$

б) Найти: $\rho(BD_1, AC)$

Решение:

а) $BD_1$ и $AC$ – скрещивающ. прямые; проекция прямой $BD_1$ на $(ABC)$ – $BD$ (т.к. $D_1D\perp(ABC)$), $BD\perp AC$, т.к. $ABCD$ – квадрат (диагонали в квадрате перпендикулярны) $\Rightarrow BD_1\perp AC$ (по т. о трех перпенд., $AC$ перпендик. проекции наклонной $BD_1$) ч.т.д.

б) $\rho(BD_1, AC)=OH$, т.к. $OH\perp AC$, $BO=OD_1$, $AH=HC$

$\triangle BHO\sim\triangle BDD_1$ по 2 углам ($\angle B$ – общий, $\angle H=\angle D=90°$), $\frac{BH}{BD}=\frac{1}{2}$ (т.к. $ABCD$ – квадрат) $\Rightarrow OH=\frac{1}{2}DD_1=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}\cdot16=8$

Ответ: 8.

№12. а) $6\sin x - 1 = \sqrt{5\sin x + 3\cos 2x}$

ОДЗ:
$5\sin x + 3\cos 2x \geq 0$
$5\sin x + 3 - 6\sin^2 x \geq 0$

$36\sin^2 x - 12\sin x + 1 = 5\sin x + 3\cos 2x$

$36\sin^2 x - 12\sin x + 1 - 5\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$

$38\sin^2 x - 17\sin x = 0$

$\sin x(38\sin x - 17) = 0$

$\sin x = 0$ или $38\sin x - 17 = 0$

$x = \pi n, n \in Z$    $\sin x = \frac{17}{38} \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin\frac{17}{18} + \pi n, n \in Z$

$36\sin^2 x - 12\sin x + 1 = 5\sin x + 3 - 6\sin^2 x$

$42\sin^2 x - 17\sin x - 2 = 0$ , $\sin x = t$

$42t^2 - 17t - 2 = 0$

$D = 25^2$ , $t_1 = \frac{17+25}{84} = \frac{42}{84} = \frac{1}{2}$ , $t_2 = \frac{17-25}{84} = -\frac{8}{84} = -\frac{2}{21}$

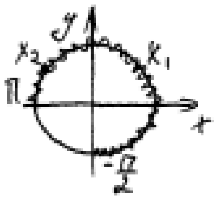
$\sin x = \frac{1}{2}$    $\sin x = -\frac{2}{21}$

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$    $x = (-1)^{n+1} \arcsin\frac{2}{21} + \pi n, n \in Z$

с учетом ОДЗ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

б) $x \in [-\frac{\pi}{2}; \pi]$




$x_1 = 0 + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$.

№14. $\frac{x^2+16}{\log_4(x^2-6x+9)} + \frac{4x}{\log_4(3-x)} \leq 0$

ОДЗ:
$\begin{cases} \log_4(x^2-6x+9) \neq 0 \\ \log_4(3-x) \neq 0 \\ x^2-6x+9 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$

$(x-3)^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2; 4$

$(x-3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$

$x < 3$

$\Downarrow$

$x \in (-\infty; 2) \cup (2; 3)$

т.к. $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = (3-x)^2$ получим

$\frac{x^2+16}{2\log_4(3-x)} + \frac{4x}{\log_4(3-x)} \leq 0$

$\frac{x^2+16+8x}{2\log_4(3-x)} \leq 0$

$\frac{(x+4)^2}{2\log_4(3-x)} \leq 0$

$x^2 + 8x + 16 = 0$
$D = 64 - 64 = 0$
$x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2$
$x = 4$

по методу интервалов:

$+ \quad -4 \quad + \quad 2 \quad - \quad 3 \quad x$

$x=-4$ , $(x+4)^2\ge0$ при любом $x$ , $\log_4(3-x)<0$ , $3-x<1 \Rightarrow x>2$

$x\in\{-4\}\cup(2;3)$

Ответ: $x\in\{-4\}\cup(2;3)$.

№17. $x+\sqrt{6a-x^2}=\sqrt{2ax+6a}$ одно решение

$\cancel{x^2}+2x\sqrt{6a-x^2}=2ax+\cancel{6a}-\cancel{6a}+\cancel{x^2}$

$2x\sqrt{6a-x^2}=2ax$

$4x^2(6a-x^2)=4a^2x^2$

$24x^2a-4x^4-4a^2x^2=0 \quad |:(-4)$

$x^4+a^2x^2-6x^2a=0$

$x^2(x^2+a^2-6a)=0$

$x^2=0$ $\qquad$ $x^2+a^2-6a=0$

один корень $\qquad$ будет корень, если $x^2=6a-a^2$

из этого один корень будет, если $6a-a^2\ne0$

$a(a-6)\ne0$

$a\ne0$ и $a\ne6$

Ответ: $a\in(-\infty;0)\cup(0;6)\cup(6;+\infty)$.

№18. Условие: $a_1-\frac{1}{3}(a_2+a_3)\ge8$

а) $a_2=60$ , $a_3=70$ , $a_1>70$

1) $a_1-\frac{1}{3}(60+70)\ge8 \quad |\cdot3$

$3a_1-130\ge8\cdot3$

$3a_1\ge24+130$

$a_1\ge\frac{154}{3}$

2) $60-\frac{1}{3}(a_1+70)\ge8 \quad |\cdot3$

$180-a_1-70\ge24$

$-a_1\ge24+70-180$

$a_1\le86$

3) $70-\frac{1}{3}(a_1+60)\ge8 \quad |\cdot3$

$210-a_1-60\ge24$

$-a_1\ge24+60-210$

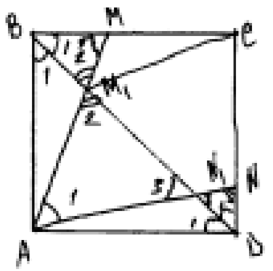
$a_1\le126$

Общее: $\begin{cases} a_1>70 \\ a_1\le86 \\ a_1\le126 \end{cases} \Rightarrow a_1\in(70;86]$

Ответ: 16

№16

Дано:
ABCD - квадрат
$\angle MAN=45^\circ$
$AB=12$, $CN=7$




а) доказать: C, M, N, $M_1$, $N_1$ лежат на одной окружности
б) Найти: R окружности

Решение:

а) $\angle MAN = \angle 1 = 45^\circ$ т.к. BD - диагональ квадрата $\angle MBD = \angle DBA = \angle 1$; $\angle 2$ - вертикал. $\Rightarrow \triangle AM_1N_1 \sim \triangle BM_1M \sim \triangle N_1ND$ по 2 углам

чтобы доказать, что точки лежат на одной окружности, рассмотрим два четырехугольника, 3 точки каждого из которых лежат на одной окружности

$M_1NDA$ можно описать, т.к. $\angle M_1 = \angle N$; опир. на одну дугу.

$BMN_1A$ можно описать, т.к. $\angle M = \angle N_1$; опир. на одну дугу

$M_1CNN_1$ также можно описать $\Rightarrow$ точки C, M, N, $M_1$, $N_1$ лежат на одной окружности