Работа №1.

№12 а) $6\sin x - 1 = \sqrt{5\sin x + 3\cos 2x}$

1) $5\sin x + 3\cos 2x \geq 0$

$5\sin x + 3(1 - 2\sin^2 x) \geq 0$

$5\sin x + 3 - 6\sin^2 x \geq 0$

$6\sin^2 x - 5\sin x - 3 \leq 0$

Замена: $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$

$6t^2 - 5t - 3 \leq 0$ (-)

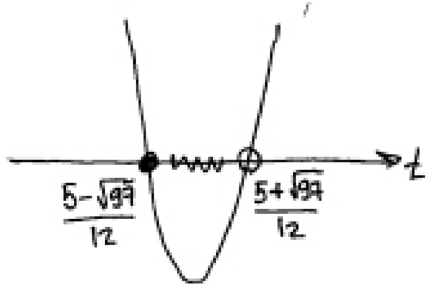
$6t^2 - 5t - 3 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 6 = 97$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{97}}{12}$

$t_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}$ $\quad t_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$

- не удовл. $-1 \leq t \leq 1$



$\frac{5-\sqrt{97}}{12} \leq t < \frac{5+\sqrt{97}}{12}$

Обр. замена:

$\frac{5-\sqrt{97}}{12} \leq \sin x < \frac{5+\sqrt{97}}{12}$

2) $36\sin^2 x - 12\sin x + 1 = 5\sin x + 3\cos 2x$

$36\sin^2 x - 17\sin x + 1 = 3 - 6\sin^2 x$

$42\sin^2 x - 17\sin x - 2 = 0$

Замена: $t = \sin x$, $-1 \leq t \leq 1$

$42t^2 - 17t - 2 = 0$

$D = 189 + 4 \cdot 42 \cdot 2 = 525$

$t_{1,2} = \frac{17 \pm 5\sqrt{21}}{84}$

Обр. замена:

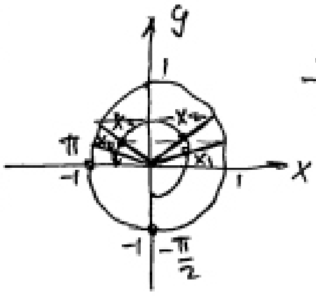
$\sin x = \frac{17+5\sqrt{21}}{84}$ $\qquad$ $\sin x = \frac{17-5\sqrt{21}}{84}$

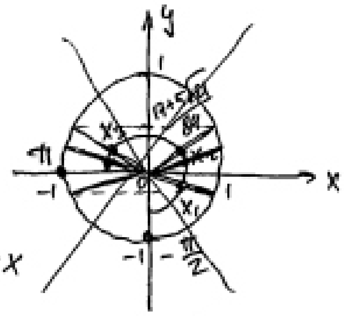
$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right) + \pi n$, $n \in Z$

$x = (-1)^m \arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right) + \pi m$, $m \in Z$

Ответ: $(-1)^n \arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right) + \pi n$, $n \in Z$; $(-1)^m \arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right) + \pi m$, $m \in Z$.

б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$





$x_1 = +\arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right)$

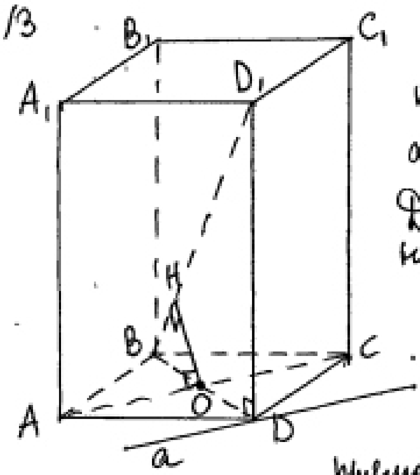
$x_2 = \arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right)$

$x_3 = \pi - \arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right)$

$x_4 = \pi - \arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right)$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right)$; $\arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right)$; $\pi - \arcsin\left(\frac{17+5\sqrt{21}}{84}\right)$; $\pi - \arcsin\left(\frac{17-5\sqrt{21}}{84}\right)$.

№13



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ – квадрат.

а) Д-ть: $BD_1 \perp AC$

Д-во: Доп. построим $a \parallel AC$ в плоск. (ABC) и диагональ BD.

① $AC \perp BD$ (т.к. диагонали квадрата) $\Rightarrow$

$\Rightarrow a \perp BD$

② $BD \perp DD_1$ (т.к. DD_1 – боковое ребро прямоуг. параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и BD летии в плоскости основание), аналогично $a \perp DD_1$

(3) $\left.\begin{array}{l} 1)\ a \perp BD \\ 2)\ BD \perp DD_1 \\ 3)\ a \perp DD_1 \end{array}\right| \Rightarrow a \perp BD_1$ по теореме о $3^х$ перпендикулярах $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC \perp BD_1$ ч.т.д.

б) $AB = 6$, $AA_1 = 16$

Найти: $\rho(BD_1; AC)$

Решение: т.к. BD - проекция BD_1 (из а)) из точки пересечения BD и AC (точки O) доп. построим $OH \perp BD_1$ и $OH \perp AC$, тогда OH - искомое расстояние.

(1) Рассм. $\triangle OHB$ и $\triangle D_1BD$:

$\left.\begin{array}{l} 1)\ \angle H = \angle D = 90^\circ \\ 2)\ \angle B \text{ - общий} \end{array}\right| \Rightarrow \triangle OHB \sim \triangle D_1BD$ по $2^м$ углам $\Rightarrow \dfrac{OH}{DD_1} = \dfrac{BO}{BD_1}$

из $\triangle ABD$ с $\angle A = 90^\circ$ (ABCD - квадрат по условию)

по теореме Пифагора:

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \Rightarrow BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ (диагонали квадрата точкой пересечения дел. пополам)

из $\triangle D_1DB$ с $\angle D = 90^\circ$ по теореме Пифагора:

$BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 16^2} = 2\sqrt{82}$

тогда $OH = DD_1 \cdot \dfrac{BO}{BD_1} = \cancel{16}^{8} \cdot \dfrac{3\sqrt{2}}{\cancel{2}\sqrt{82}} = 24\sqrt{\dfrac{2}{82}} = \dfrac{24}{\sqrt{41}}$

Ответ: $\dfrac{24}{\sqrt{41}}$

№14 $\dfrac{x^2+16}{\log_4(x^2-6x+9)} + \dfrac{4x}{\log_4(3-x)} \le 0$

1) $\begin{cases} x^2-6x+9 > 0 \\ \log_4(x^2-6x+9) \ne 0 \\ 3-x > 0 \\ \log_4(3-x) \ne 0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x-3)^2 > 0 \\ (x-3)^2 \ne 1 \\ x < 3 \\ 3-x \ne 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ne 3 \\ x \ne 4 \\ x \ne 2 \\ x < 3 \\ x \ne 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x < 3 \\ x \ne 2 \end{cases}$

2) $\dfrac{x^2+16}{\log_4 (x-3)^2} + \dfrac{4x}{\log_4 (3-x)} \leq 0$

$\dfrac{x^2+16}{\log_4 (-(3-x))^2} + \dfrac{4x}{\log_4 (3-x)} \leq 0$

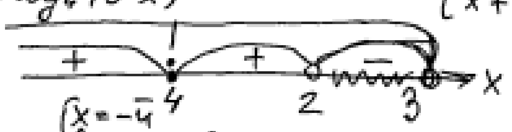
$\dfrac{x^2+16}{\log_4 (3-x)^2} + \dfrac{4x}{\log_4 (3-x)} \leq 0$

$\dfrac{x^2+16}{2\log_4 (3-x)} + \dfrac{4x^{\,\swarrow 2}}{\log_4 (3-x)} \leq 0$

$\dfrac{x^2+16+8x}{2\log_4 (3-x)} \leq 0$

$\dfrac{(x+4)^2}{2\log_4 (3-x)} \leq 0 \ (-)$

$\dfrac{(x+4)^2}{2\log_4 (3-x)} = 0 \iff \begin{cases} x=-4 \\ x<3 \\ x\neq 2 \end{cases}$



$\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ 2<x<3 \end{array}\right.$

Ответ: $(2;3) \cup \{-4\}$

N15 Пусть r - процент по вкладу, а S - ~~искомая~~ исходная сумма вклада, тогда

$r\cdot S = 30000$, а $r(S+30000) = 31800$. Решим систему ур-ний:

$\begin{cases} rS = 30000 \\ r(S+30000) = 31800 \end{cases} \quad r = \dfrac{30000}{S}$

$\dfrac{30000}{S}(S+30000) = 31800$

$\dfrac{30000S + 30000^2}{S} = 31800$

$30000S + 30000^2 = 31800S$

$30000^2 = 1800S$

$S = 500\,000$

$r = \dfrac{30000}{500000} = 0{,}06 \Rightarrow$

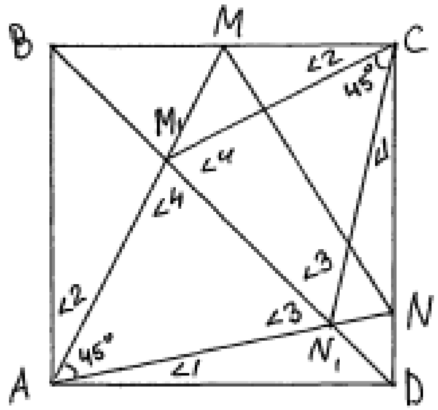
$\Rightarrow$ искомая сумма $\Sigma =$

$= (S + 30000 + 31800)\cdot(1+r) = (500\,000 + 30000 + 31800)\cdot(1+0{,}06) =$

$= 595\,508$

Ответ: 595 508 рублей.

№16



Дано: ABCD-квадрат; т.$M \in BC$; т.$N \in CD$; $\angle MAN = 45°$; $BD \cap AM = \{M_1\}$; $BD \cap AN = \{N_1\}$; б) $CN = 7$, сторона квадр.-12.

а) Д-ть: C, M, N, M_1, N_1 лежат на одной окружности

Д-во: Доп.постр. CM_1 и CN_1.

① Рассм. $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$:

1) $\angle A = \angle C = 90°$ (ABCD-квадрат)
2) ~~BD~~ BD-общая
3) $AB = BC$ (стороны квадрата)

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BAD = \triangle BCD$ (по катету и гипотенузе) $\Rightarrow AM_1 = CM_1$ и $AN_1 = CN_1$ (сходные элементы в равных треугольниках) ~~$\Rightarrow$~~

② Рассм. $\triangle M_1AN_1$ и $\triangle CM_1N_1$

1) M_1N_1 - общая
2) $AM_1 = CM_1$
3) $AN_1 = CN_1$

$\Rightarrow \triangle MAN_1 = \triangle CM_1N_1$ по 3м сторонам $\Rightarrow \angle M_1CN_1 = \angle M_1AN_1 = 45°$, $\angle AN_1M_1 = \angle CN_1M_1 = \angle 3$ и $\angle CM_1N_1 = \angle AM_1N_1 = \angle 4$.

③ Аналогично ① $\angle NCN_1 = \angle DAN_1$ и $\angle BCM_1 = \angle BAM_1$. Пусть $\angle 1 = \angle DAN$, а $\angle 2 = \angle BAM$.

④ $\angle M_1MC = 180° - \angle MAD = 180° - 45° - \angle 1$ (т.к. соответственные при $AD \parallel BC$ и секущей AM), аналогично $\angle ANC = 180° - 45° - \angle 2$

⑤ Из $\triangle CMM_1$ ~~и~~ $\triangle CNN_1$ ~~[illegible]~~

$\angle CM_1M = 180° - \angle 2 - 180° + 45° + \angle 1 = 45° - \angle 2 + \angle 1$

$\angle CN_1N = 180° - \angle 1 - 180° + 45° + \angle 2 = 45° - \angle 1 + \angle 2$

⑥ $\angle AN_1N = \angle AN_1M_1 + \angle CN_1M_1 + \angle CN_1N = \angle 3 + \angle 3 + 45° - \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 3 + ~~[illegible]~~\ 2\angle 2$

$\angle MCN = \angle 2 + \angle 1 + \angle M_1CN_1 = \angle 1 + \angle 2 + 45° \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 90° - 45° = 45° \Rightarrow \angle 1 = 45° - \angle 2$

$\Rightarrow 180° = 2\angle 3 + 2\angle 2$

$\angle 2 + \angle 3 = 90° \Rightarrow \angle 3 = 90° - \angle 2$ далее аналогично $\angle 4 = 90° - \angle 1$

7) Рассм. MM_1CN_1 и NN_1M_1C:

1) $\angle M_1MC + \angle M_1N_1C = 180 - 45 - \angle 1 + 90 - \angle 2 = 180°$ $\Rightarrow$ вокруг MM_1CN_1 можно описать окружность.

2) $\angle CNN_1 + \angle CM_1N_1 = 180 - 45 - \angle 2 + 90 - \angle 1 = 180°$ $\Rightarrow$ вокруг NN_1M_1C можно описать окружность.

3) точки M_1, N_1 и C - общие $\Rightarrow$ окружность описанная вокруг четырёхугольников общая $\Rightarrow$ точки M, C, N, N_1, M_1 лежат на одной окружности ч.т.д.

б) Найти: диаметр окружности, описанной вокруг M_1MCNN_1.

Решение: Доп. постр. MN. Т.к. $\angle MCN$ - вписанный в окр. и $\angle MCN = 90°$, то MN - искомый диаметр.

1) Рассм. $\triangle NAD$:

$ND = CD - CN = 12 - 7 = 5$, тогда ~~по теор. Пифагора~~:

$\angle 1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{ND}{AD}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right) \Rightarrow \angle 2 = 45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)$

~~$\angle BAD = \angle 1 + \angle 2 + 45°$~~

2) Рассм. $\triangle ABM$ с $\angle B = 90°$:

$BM = \operatorname{tg}\angle 2 \cdot AB = \operatorname{tg}\left(45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right) \cdot 12$

$MC = 12 - BM = 12 - 12\operatorname{tg}\left(45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)$

3) Рассм. $\triangle CMN$ с $\angle C = 90°$:

по теор. Пифагора:

$MN = \sqrt{CM^2 + CN^2} = \sqrt{\left(12 - 12\operatorname{tg}\left(45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)\right)^2 + 7^2}$

Ответ: $\sqrt{\left(12 - 12\operatorname{tg}\left(45° - \operatorname{arctg}\left(\frac{5}{12}\right)\right)\right)^2 + 7^2}$

№18 а) т.к. 60 - наим. число в тройке, то условие выполняется при таких x (третье число), что $\frac{70+x}{3} \leq 60 - 8$

$\frac{70+x}{3} \leq 52 \Rightarrow x \leq 86$ т.е. $x \in (70; 86]$ — 16 чисел $\Rightarrow$ т.е.

существует 16 таких троек.
Ответ: 16.

б) Пусть 24 - меньшее число в тройке, тогда a и в - другие 2 числа должны удовлетворять:

$$\frac{a+в}{3} \leq 24-8$$

$a+в \leq 48$, т.к. все числа в тройке различны по условию, то одно из чисел a и в обязательно меньше 24, тогда сумма оставшихся >48, а т.к. ~~число~~ в таком случае меньшее число <24, то и сумма ~~остави~~ остальных должна удовлетворять условию <48 => нет, такая тройка не найдётся.
Ответ: нет, не найдётся.