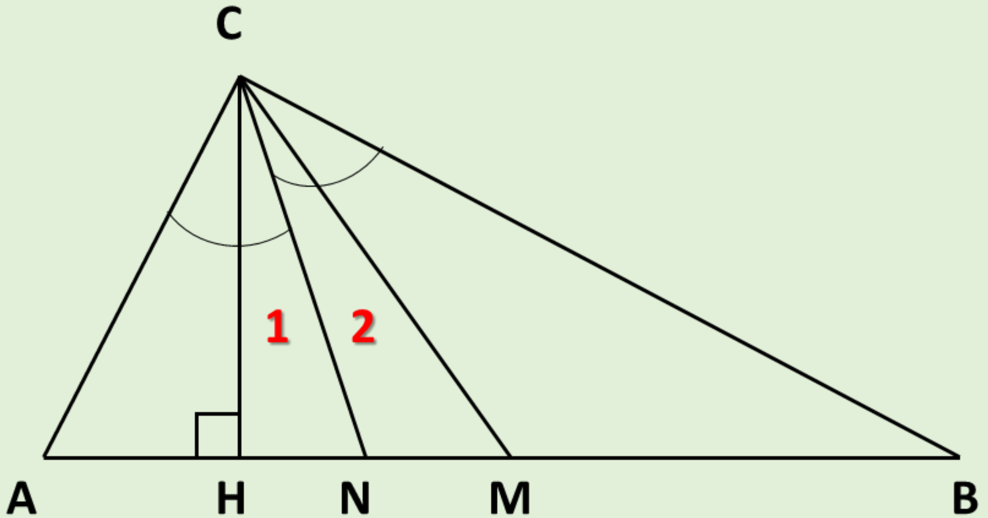
ОПОРНЫЕ ЗАДАЧИ В ГЕОМЕТРИИ, КАК ФУНДАМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ЗАДАЧ

Задача **«ФАКТ»** – задача, в которой формируется некий факт, который часто встречается в других задачах.

Задача **«МЕТОД»** – задача, метод решения которой можно использовать при решении похожих задач.

<u>Задача - факт</u>

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, исходящими из той же вершины.



<u>ДАНО:</u>

CK – биссектриса ∠C

CM – медиана

CH – высота

<u>ДОКАЗАТЬ:</u>

∠1=∠2 (∠HCN=∠NCH)

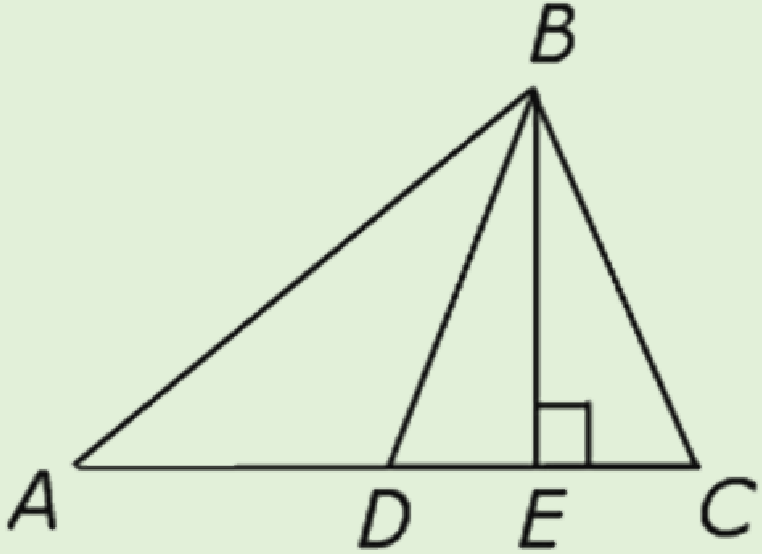
<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:</u>

$\angle 1 = 45° - \angle ACH = 45° - (90° - \angle A) = 45° - \angle B$

$\angle 2 = 45° - \angle MCB = 45° - \angle B$

Задача - факт

2. Медиана треугольника делит его на два равновеликих треугольника.



ДАНО:
BD – медиана
BE – высота
ДОКАЗАТЬ:
$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC}$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

$$\mathrm{S}_{\Delta \mathrm{ABD}} = \frac{1}{2}\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BE}, \mathrm{S}_{\Delta \mathrm{DBC}} = \frac{1}{2}\mathrm{DC} \cdot \mathrm{BE},$$

$$\mathrm{BD} - \text{медиана, значит } \mathrm{AD} = \mathrm{CD} \Rightarrow S_{\Delta ABD} = S_{\Delta DBC}.$$

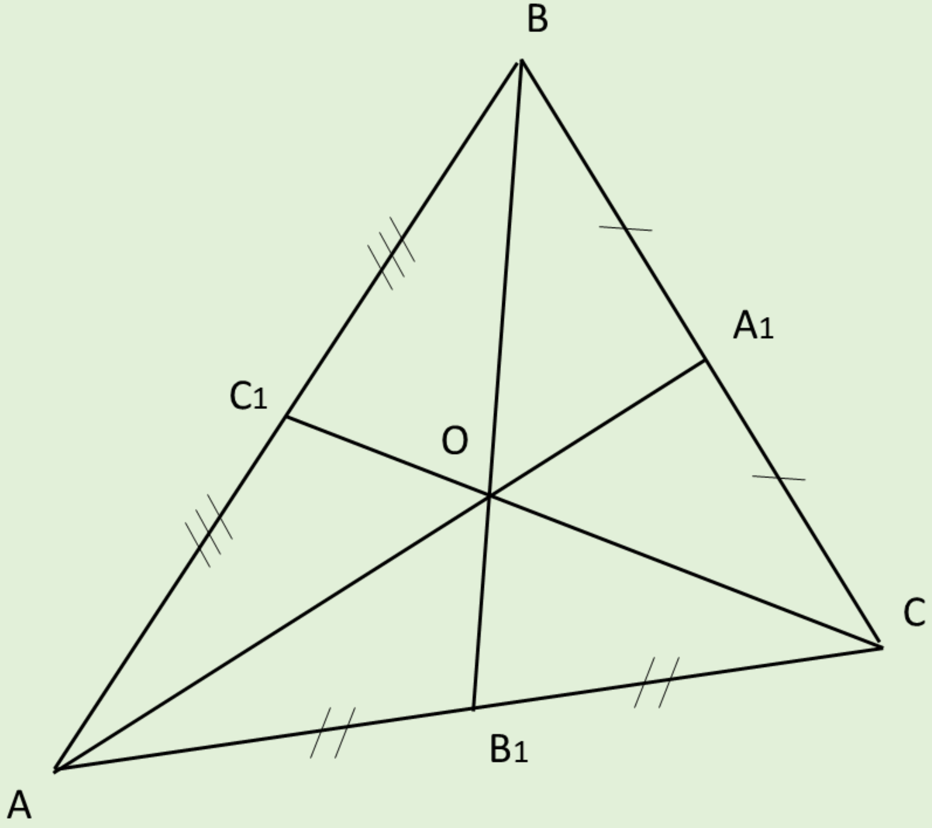
Использование опорных задач.

Пример 1.

Найти площадь параллелограмма ABCD, если площадь ΔBCM равна 5, точка M - середина CD.

Задача - факт

3. Если О – точка пересечения медиан треугольника АВС, то Δ АОВ, ΔВОС, ΔАОС – равновелики.



$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABB1} - S_{\Delta AOB1}$

$S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BB1C} - S_{\Delta B1OC}$

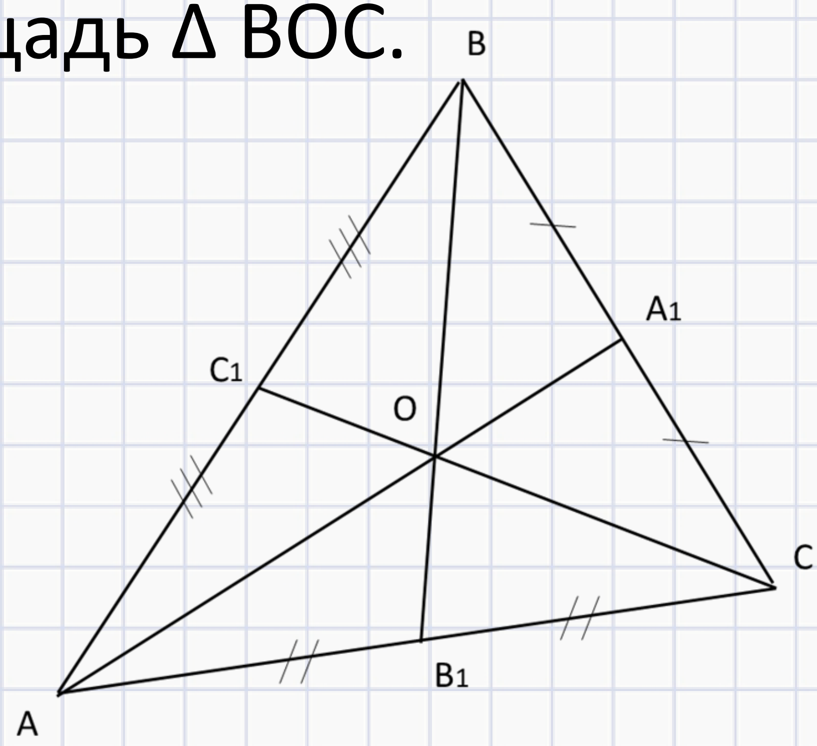
Аналогично

$S_{\Delta AOC} = S_{\Delta AOB} = S_{\Delta BOC}$

Использование опорных задач.

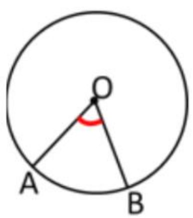
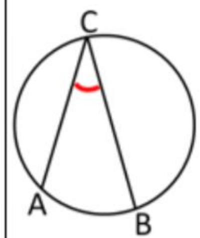
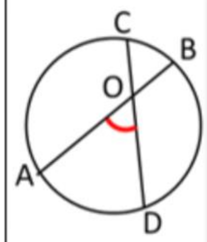
Пример 2.

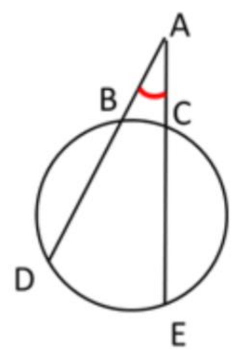
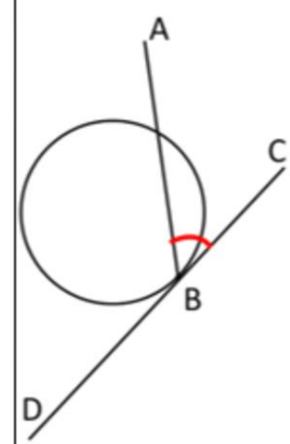
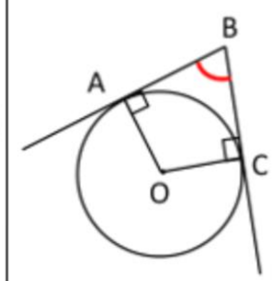
Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь Δ BOC.



$$S_{\Delta ABC} = 84$$
$$S_{\Delta BOC} = 28$$

Углы, связанные с окружностью.

Центральный угол	*Вписанный угол*	*Угол между двумя пересекающимися хордами*
		
$\angle AOB = \smile AB$	$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$	$\angle AOD = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile$

Угол между двумя секущими, исходящими из одной точки	*Угол между касательной и хордой, один из концов которой является точкой касания*	*Угол между двумя касательными, исходящими из одной точки*
		
$\angle DAE = \frac{1}{2}(\smile DE - \smile BC)$	$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB$	$\angle ABC = 180° - \smile AC$

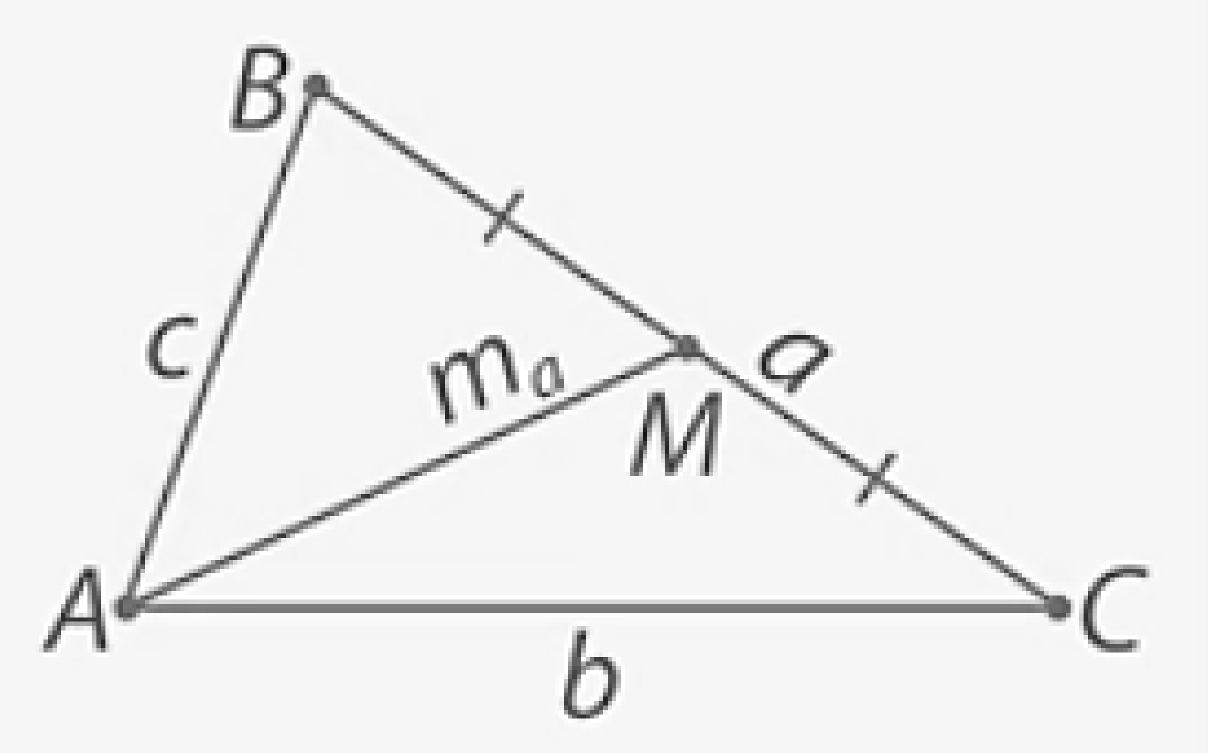
Методы решения геометрических задач

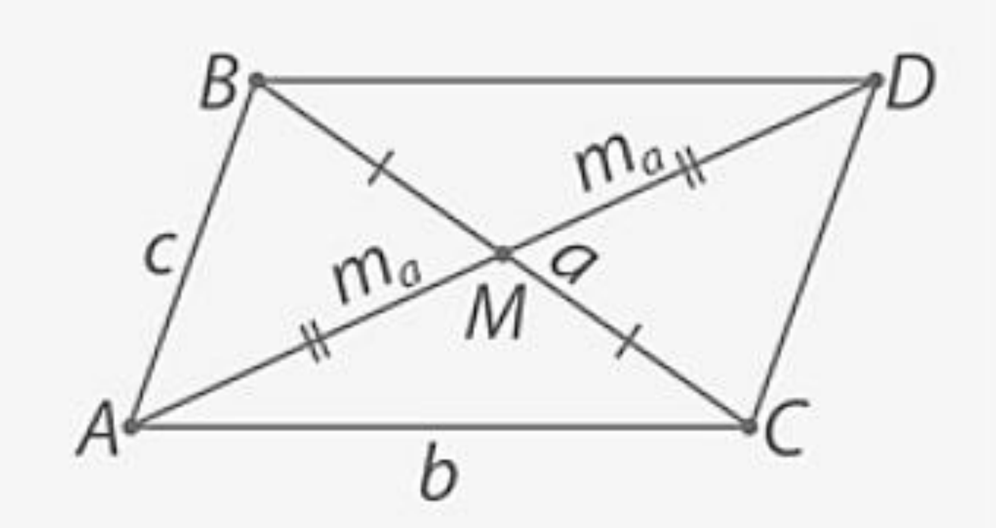
- Поэтапно-вычислительный метод.
- Алгебраический метод.
- Геометрический метод (использование дополнительных построений).
- Метод площадей.
- Метод вспомогательных элементов.
- Комбинированный метод.
- Метод ключевых задач.

Геометрический метод

(использование дополнительных построений)

Задача 1. Найти длину медианы треугольника, зная длины его сторон.





$$\cos\angle A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$AD = (2m_a)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\angle ABD$$

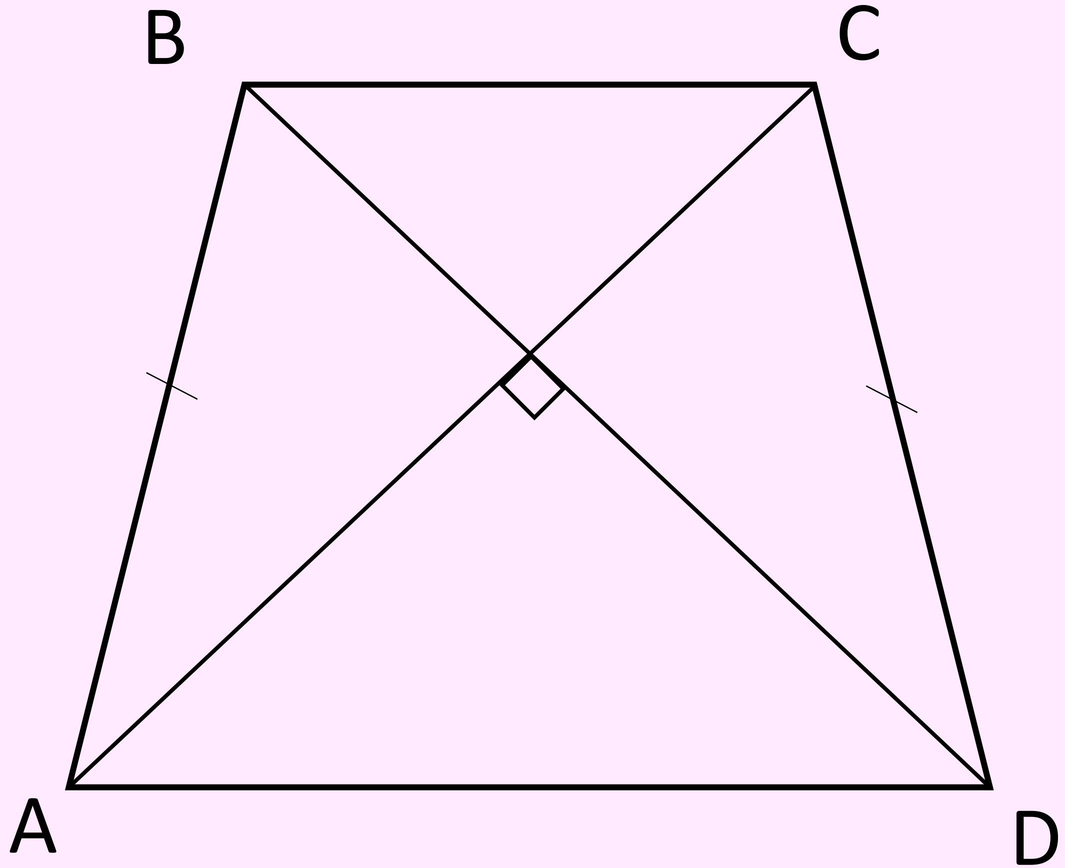
$$(2m_a)^2 = c^2 + b^2 + 2bc \cdot \cos\angle A$$

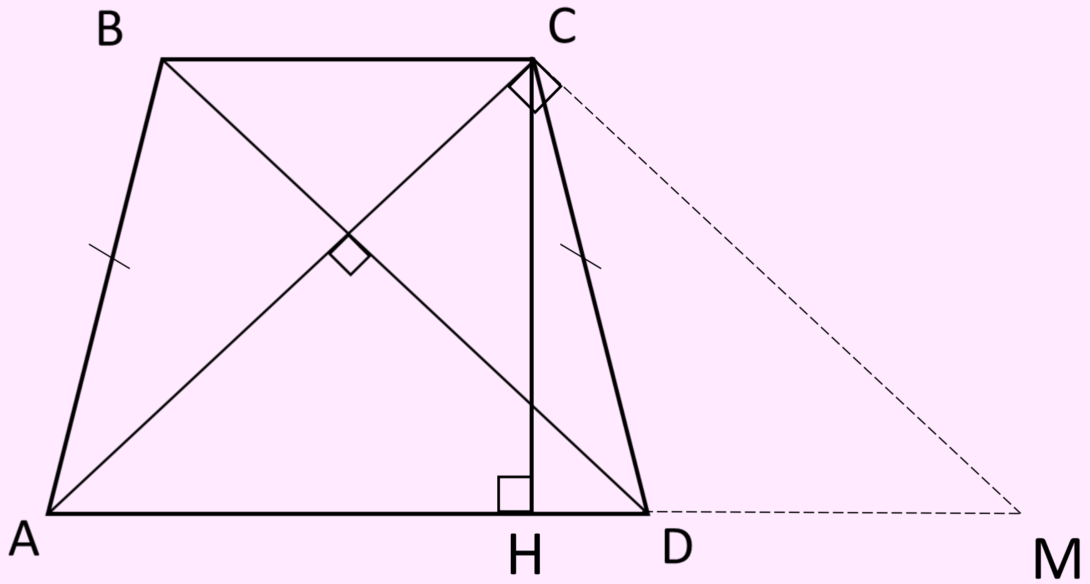
$$(2m_a)^2 = c^2 + b^2 + \frac{2bc \cdot (c^2 + b^2 - a^2)}{2bc}$$

$$(2m_a)^2 = 2c^2 + 2b^2 - a^2$$

$$\boxed{m_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}{2}}$$

Задача 2. Площадь равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями равна квадрату высоты.





Строим CM//BD $\Rightarrow$ $\angle ACM = 90°$

ΔACM – прямоугольный, равнобедренный

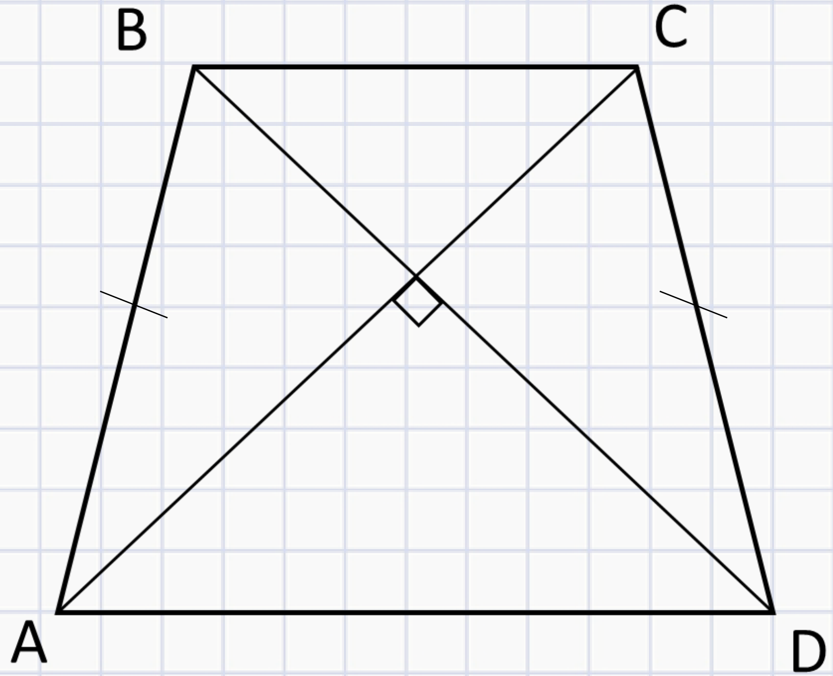
$S_{\Delta ACM} = S_{ABCD}$

CH = AH = HM = h

$$\boxed{S_{ABCD} = h^2}$$

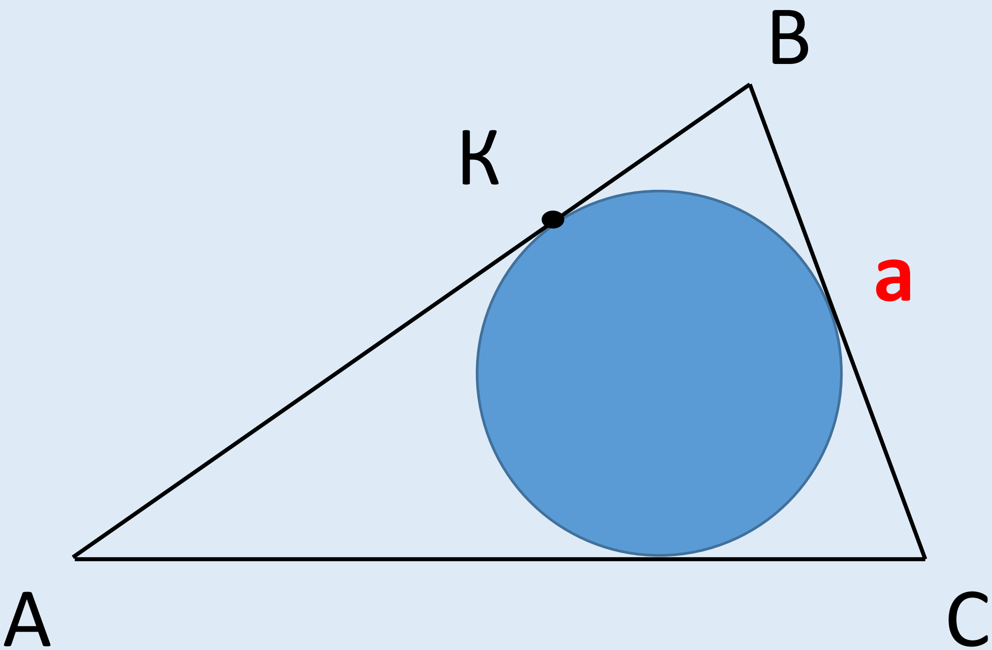
Пример 1.

В равнобедренной трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями основания равны 6 и 10. Найдите площадь трапеции.

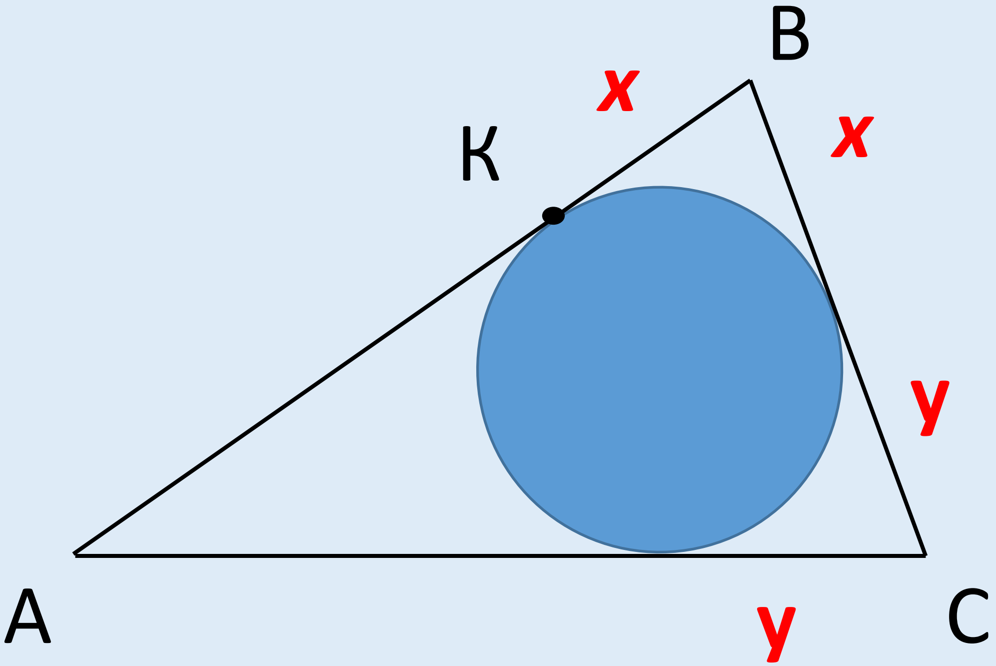


Алгебраический метод

Задача 1. Окружность, вписанная в треугольник.



$$AK = \frac{P}{2} - a$$



$$P = 2AK + 2x + 2y$$

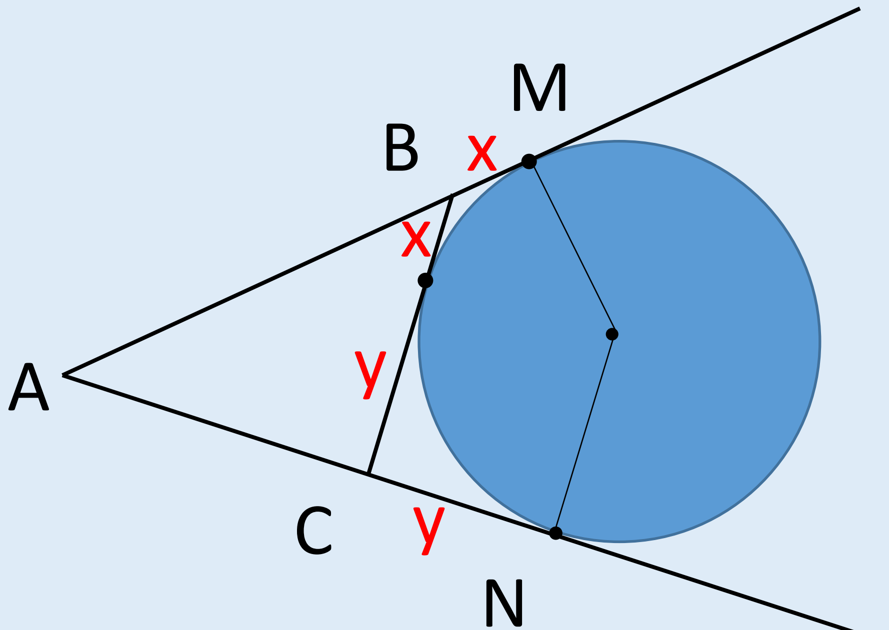
$$2AK = P - 2x - 2y$$

$$2AK = P - 2(x + y)$$

$$2AK = P - 2a$$

$$\boxed{AK = \frac{P}{2} - a}$$

Задача 2. Окружность, вневписанная в треугольник



AM = AN

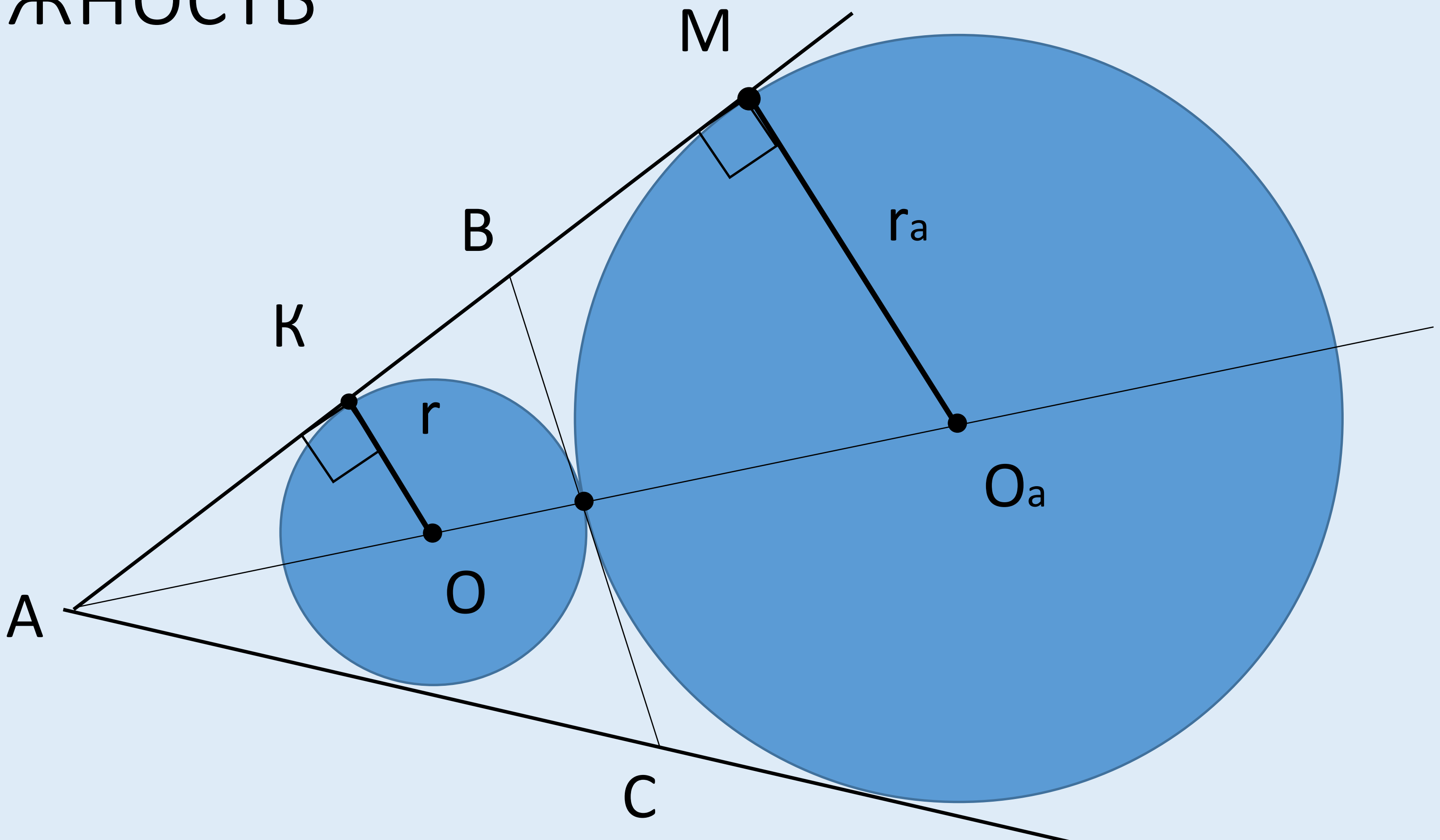
AM + AN = AB + BM + AC + CN

= c + x + b + y

2AM = c + b + a

$$\boxed{AM = \frac{P}{2}}$$

Задача 3. Вписанная и вневписанная окружность



$\Delta AOK \sim \Delta AO_aM$

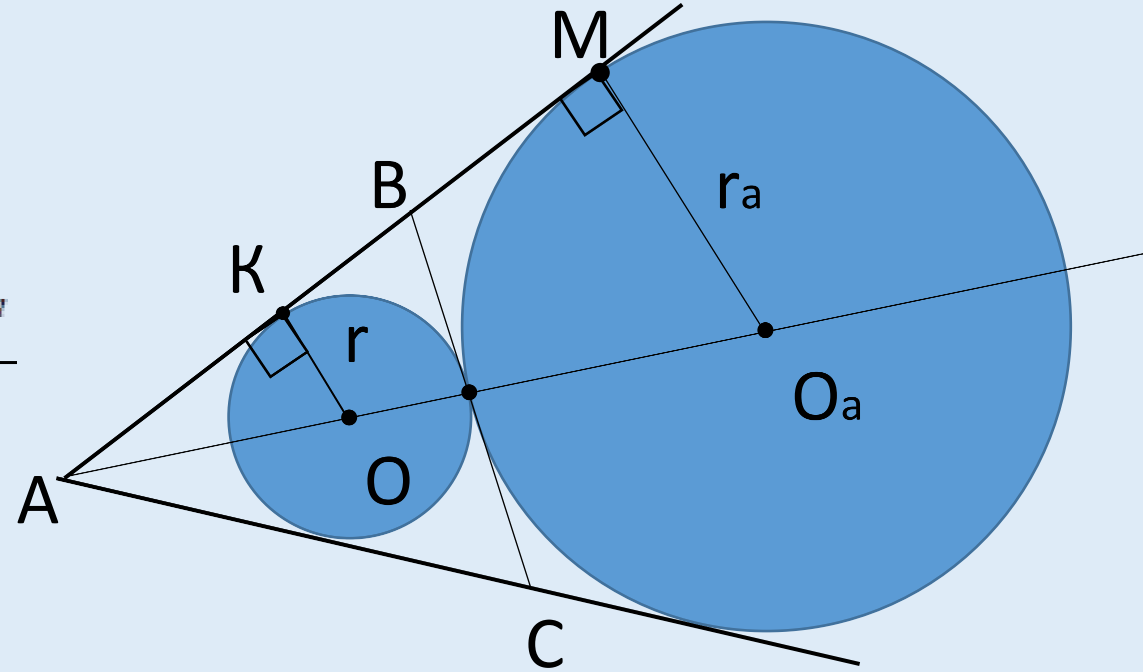
$$\frac{AK}{AM}=\frac{r}{r_a}$$

$$\frac{\frac{P}{2}-a}{\frac{P}{2}}=\frac{r}{r_a}\Rightarrow r=\frac{(\frac{P}{2}-a)r_a}{\frac{P}{2}}$$

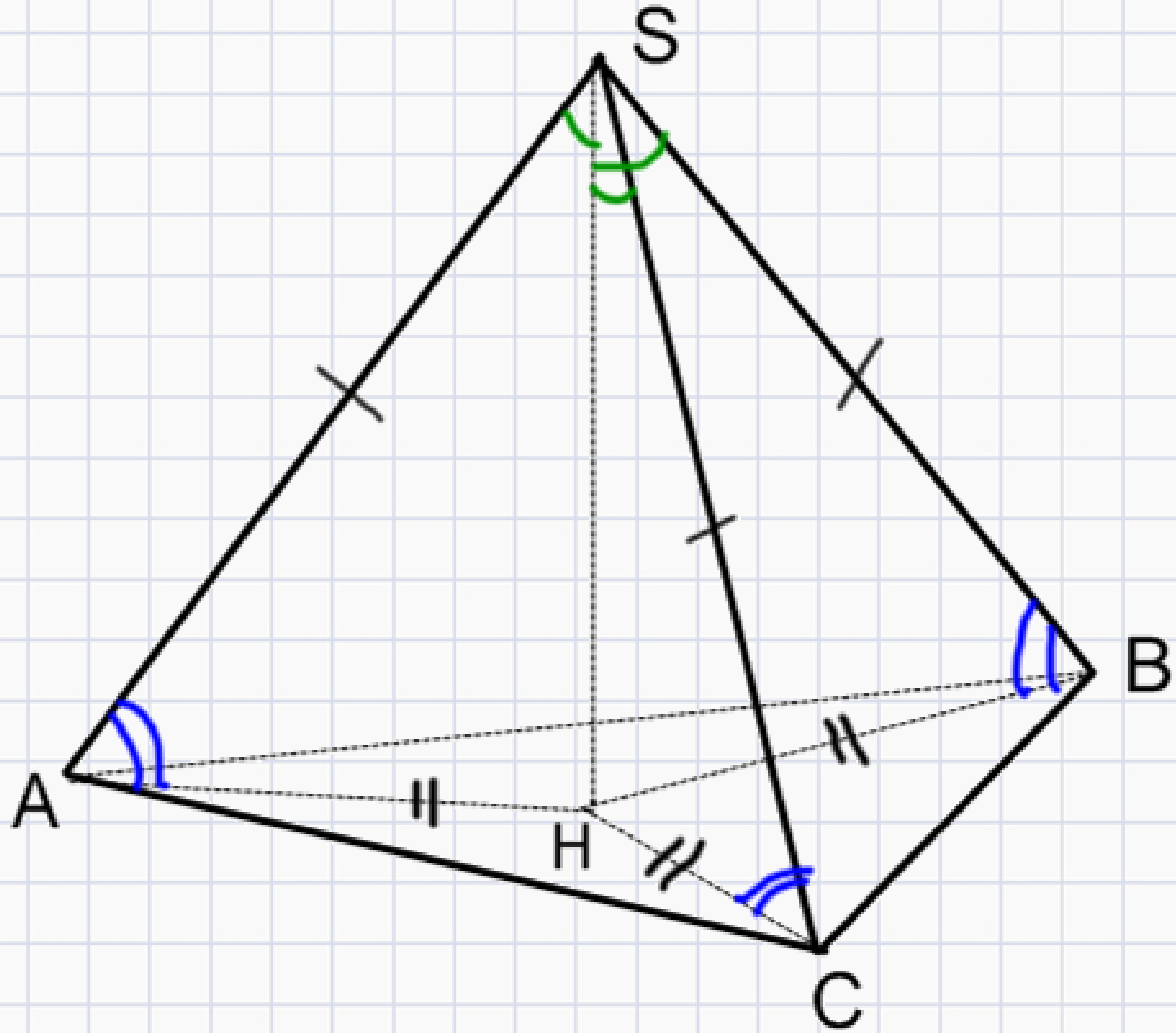
$$\frac{1}{2}\Pr=\left(\frac{P}{2}-a\right)r_a$$

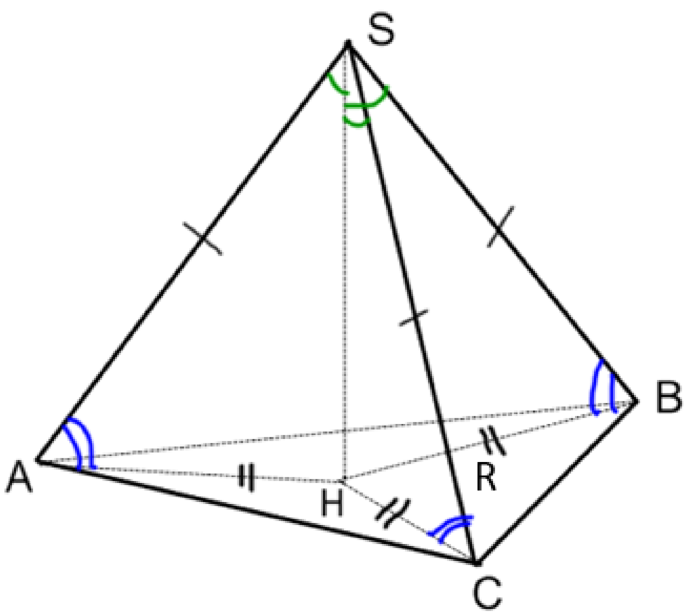
$$S_{\Delta ABC}=\left(\frac{P}{2}-a\right)r_a$$

$$\boxed{r_a=\frac{S_{\Delta ABC}}{\left(\frac{P}{2}-a\right)}}$$



Пирамиды с равными боковыми ребрами.





Высота пирамиды проецируется в центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды

Боковые ребра пирамиды равны

Боковые ребра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания

Боковые ребра пирамиды составляют равные углы с высотой пирамиды

Высота пирамиды проецируется в центр окружности, описанной вокруг основания пирамиды ⟺ **Боковые ребра пирамиды равны** ⟺ **Боковые ребра пирамиды равнонаклонены к плоскости основания** ⟺ **Боковые ребра пирамиды составляют равные углы с высотой пирамиды**

**№249, 250-253*

**Геометрия 10-11 классы. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.*

Главные зависимости для многоугольников, лежащих в основании пирамиды с равными боковыми ребрами.

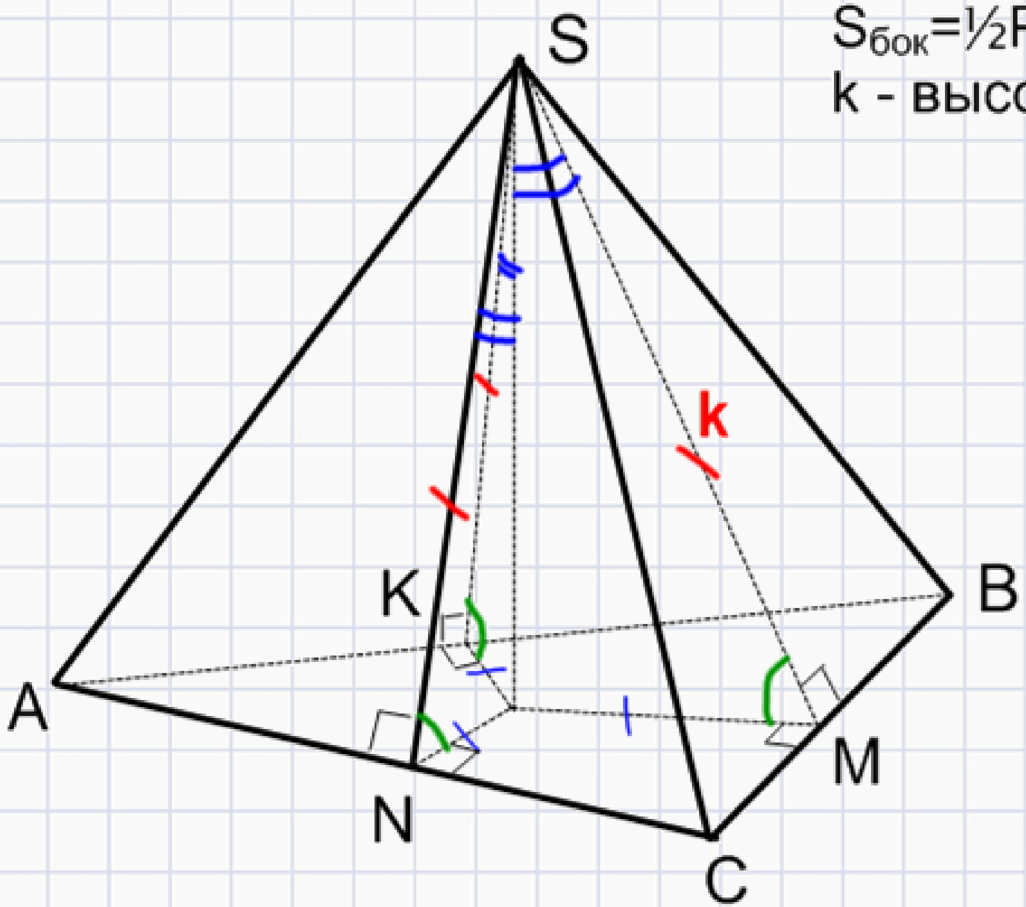
Многоугольник, около которого можно описать окружность	Центр описанной окружности	Формулы
произвольный треугольник	точка пересечения серединных перпендикуляров	$R = \frac{abc}{4S}; \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R,$ где a, b, c — стороны треугольника
равнобедренный треугольник	точка пересечения серединных перпендикуляров находится на высоте, проведённой к основанию	$R = \frac{abc}{4S}; \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2R,$
прямоугольный треугольник	середина гипотенузы	R — половина гипотенузы
прямоугольник	точка пересечения диагоналей	R — половина диагонали

1. В основании пирамиды с равными боковыми ребрами лежит трапеция. **(равнобедренная)** трапеции.
2. В пирамиде углы между боковыми ребрами и плоскостью основания равны. В основании пирамиды параллелограмм. Определите вид параллелограмма. **(прямоугольник)**
3. В основании пирамиды лежит ромб. Углы между боковыми ребрами и высотой пирамиды равны. Найти углы ромба. **(90°)**

Пирамиды с равнонаклоненными гранями.

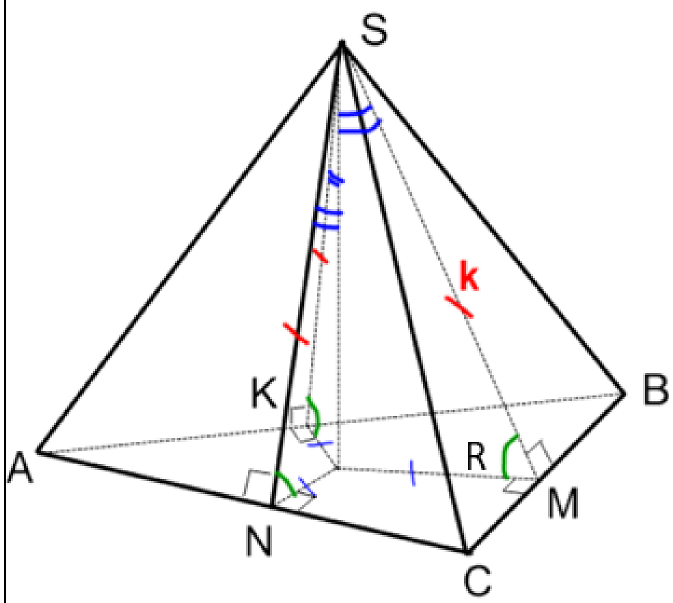
$S_{бок}=½Pk$

k - высота боковой грани



$S_{бок}=\frac{1}{2}Pk$

k - высота боковой грани



Боковые грани наклонены под одним углом к плоскости

Высота проецируется в центр окружности, вписанной в основание

Высоты боковых граней равны

Высоты боковых граней составляют равные углы с высотой пирамиды

**№246, 247,248*

**Геометрия 10-11 классы. Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др.*

1. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, в основании лежит параллелограмм. Определите вид параллелограмма.

2. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Высоты боковых граней равны. Определить вид прямоугольника.

3. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция с периметром **Р**. Высоты боковых граней составляют равные углы с высотой пирамиды. Найти боковое ребро трапеции.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!