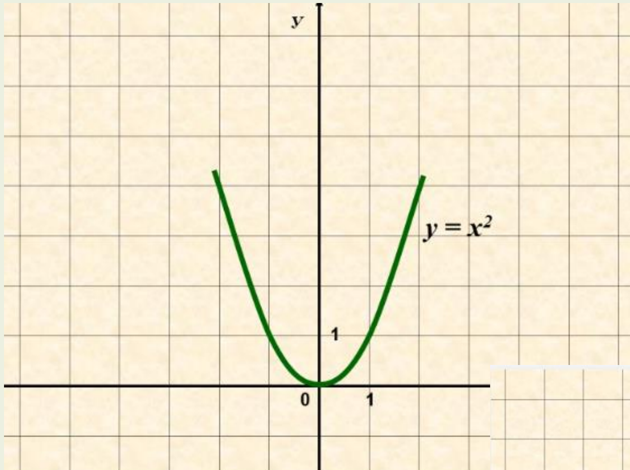
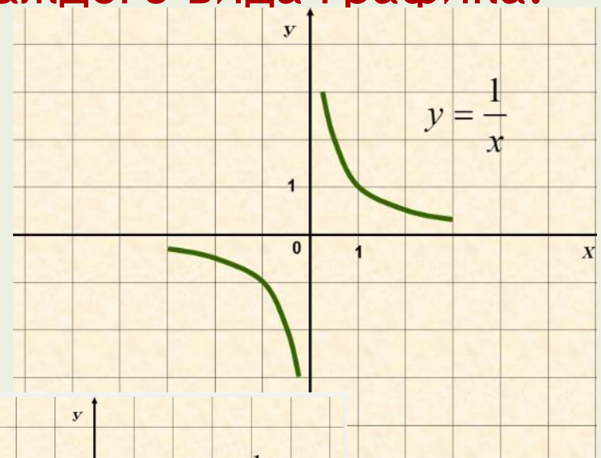
Математика, 9 класс. Подготовка к ОГЭ, задания 11 и 22

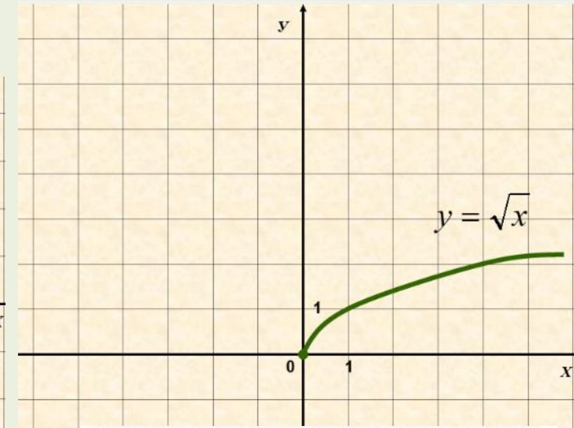
Графики функций

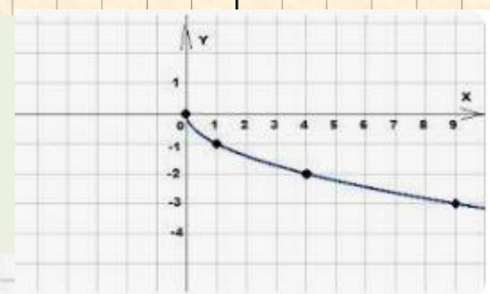
ВЕДЕРНИКОВА Н.В.
Учитель математики
гимназия № 39 «Французская гимназия»

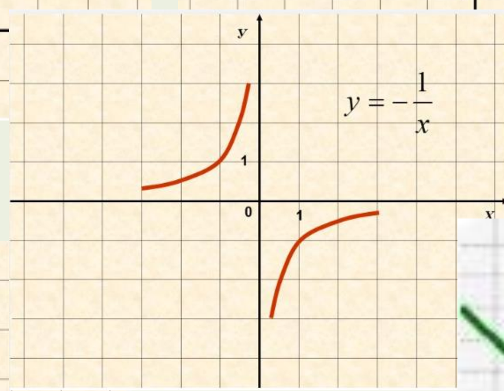
Обязательные навыки перед выполнением задания 11 и 22 на ОГЭ: Построение базовых графиков функций. Контрольные точки для каждого вида графика.

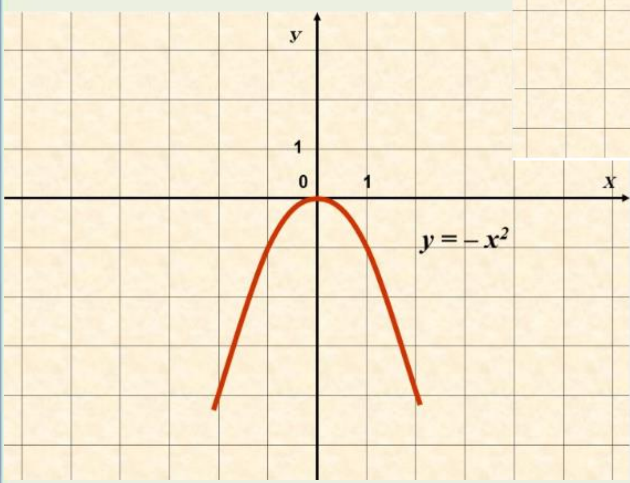


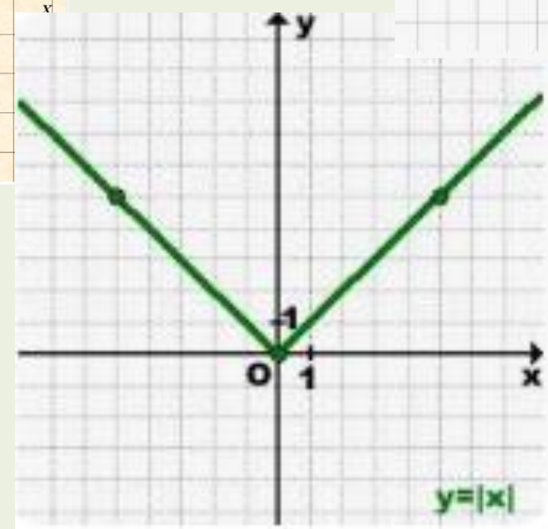


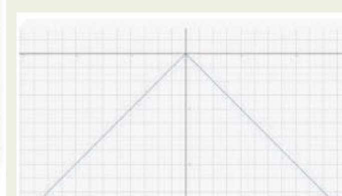






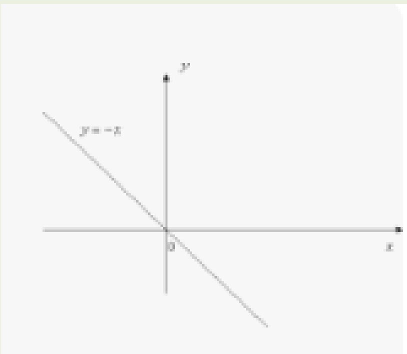


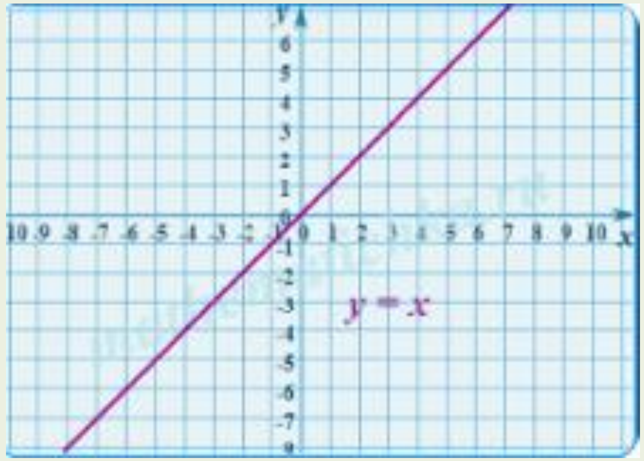




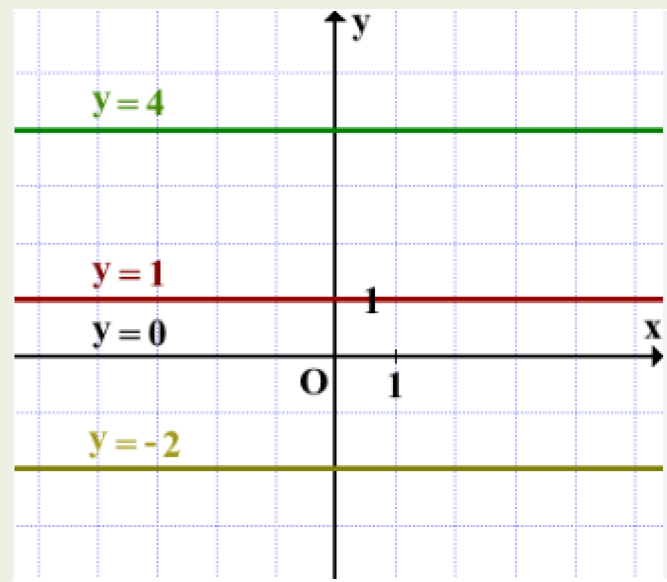
Обязательные навыки перед выполнением задания 11 и 22 на ОГЭ:
Знания базовых графиков функций.

Функция y = kx





Прямая y=m



МОДЕЛЬ УРОКА –

Кластерная схема расстановки ученических столов в классе

ОГЭ

Задание 11

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

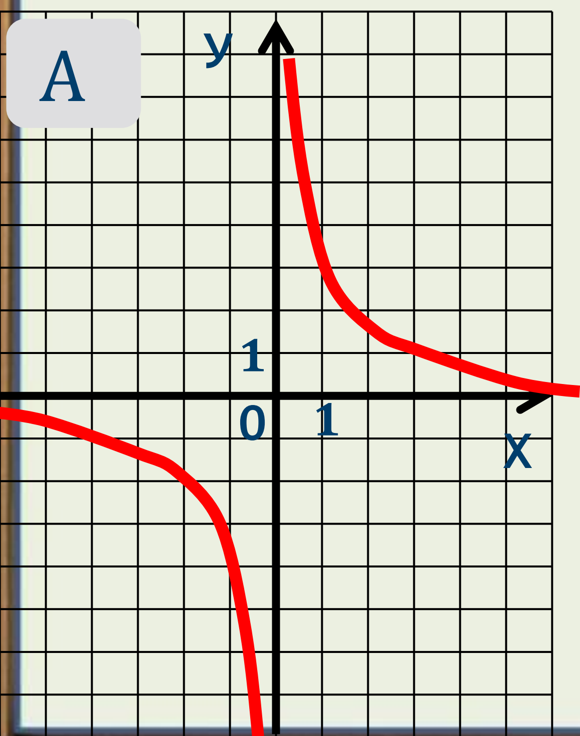
1) $y = \frac{3}{x}$ 2) $y = 3x$ 3) $y = x + 3$ 4) $y = x^2 - 3$

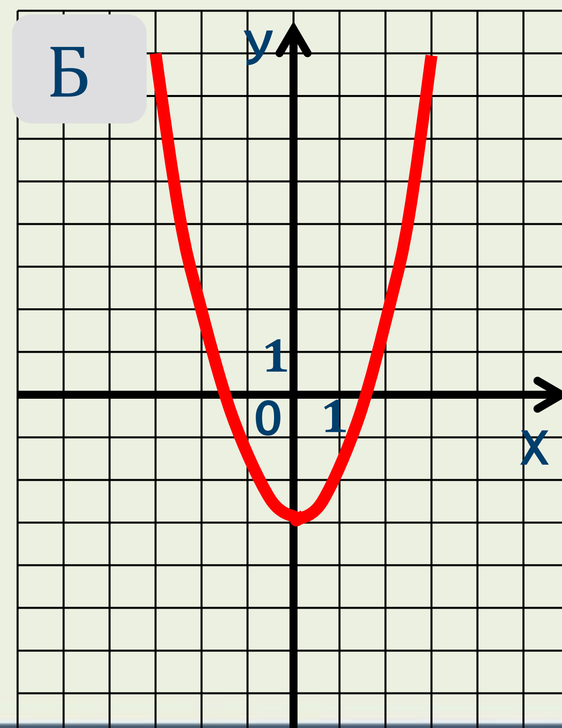
Обе функции линейные, график линейной функции – прямая.

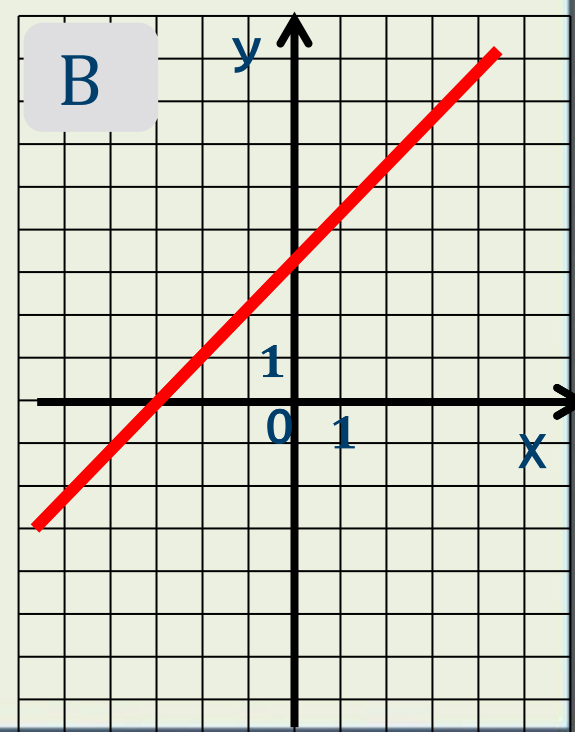
Но график функции у=3х проходит через точку с координатами (0;0), следовательно

Квадратичная функция, график – парабола.

1. Функция обратной пропорциональности, её график – гипербола.







Найдите значение k по графику функции $y = \frac{k}{x}$ ***,***

изображенному на рисунке.

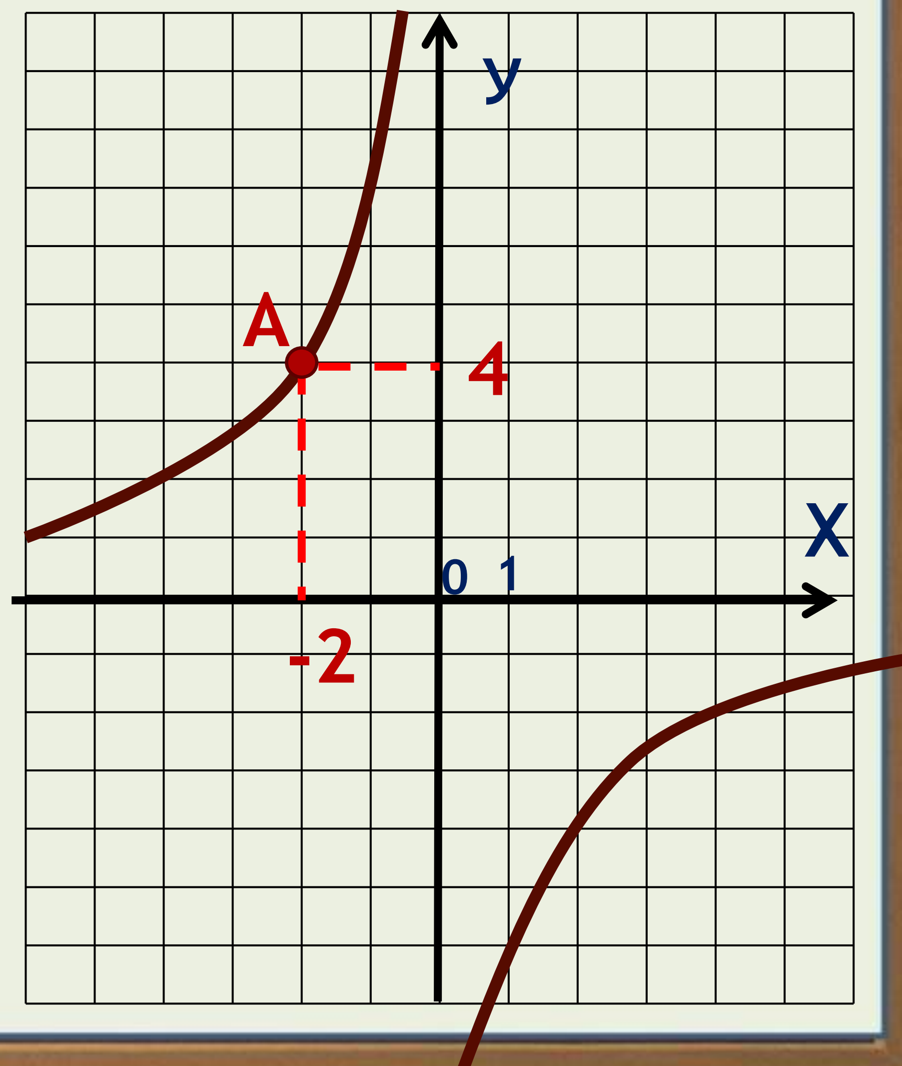
Найдем координаты точки, принадлежащей графику функции

А $(-2\,;4)$

Подставим координаты точки в функцию

$y = \frac{k}{x}$ $\longrightarrow$ $\boxed{4} = \frac{k}{\boxed{-2}}$

$k = -8$



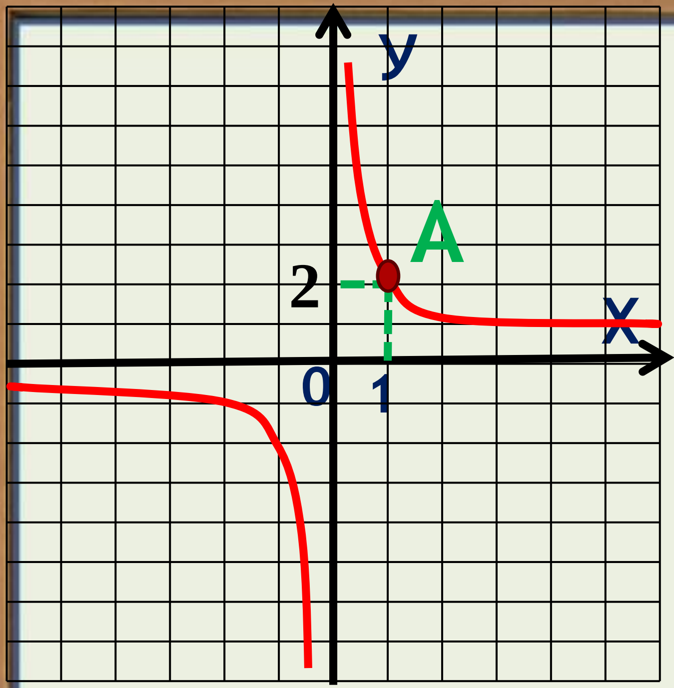


График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?

1) $y = \frac{1}{2x}$

2) $y = -\frac{2}{x}$

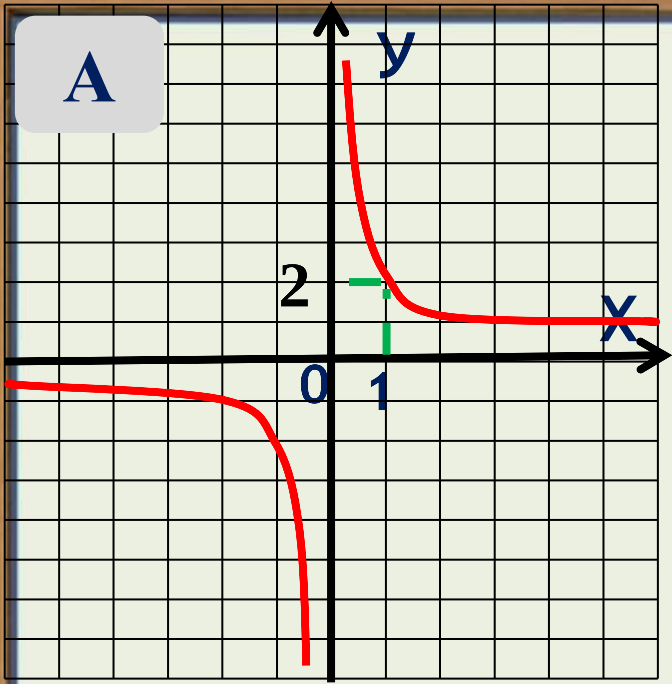
3) $y = \frac{2}{x}$

4) $y = -\frac{1}{2x}$

Так как график функции расположен в 1 и 3 четвертях, то $\boldsymbol{k > 0}$.

Найдем координаты точки, принадлежащей графику функции.

Очевидно, что точка А(1;2) принадлежит функции №3.

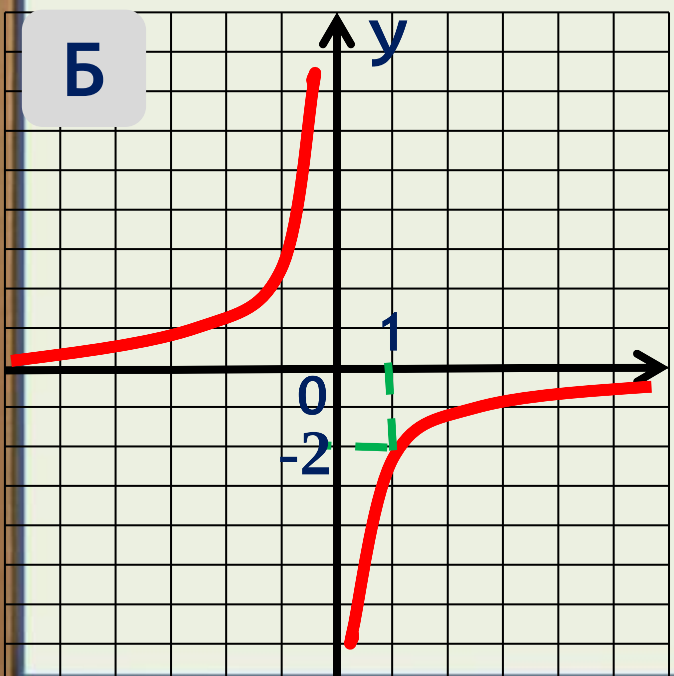


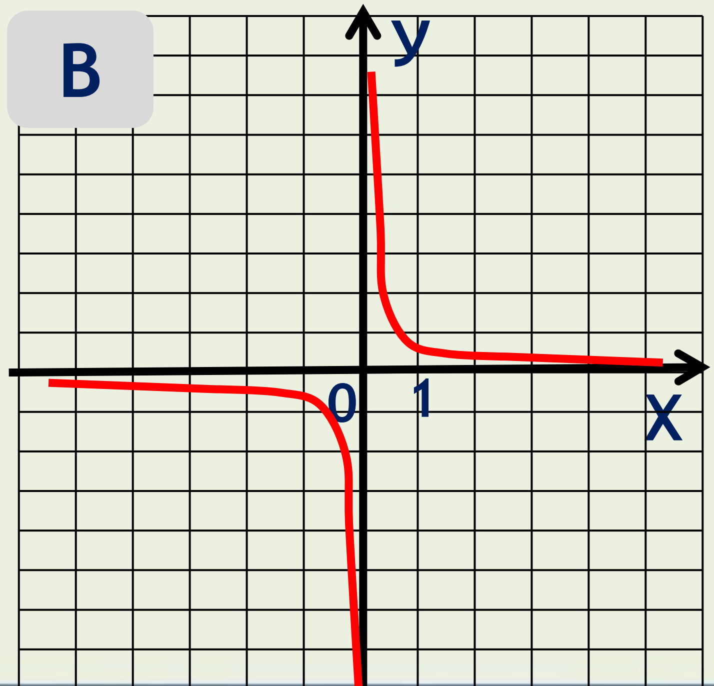
Установите соответствие между графиками и формулами, которые их задают.

Если $\boldsymbol{k < 0}$,то график функции расположен во второй и четвертой четверти.

Далее поступаем как в предыдущей задаче.

А – 1 Б – 3 В - 2





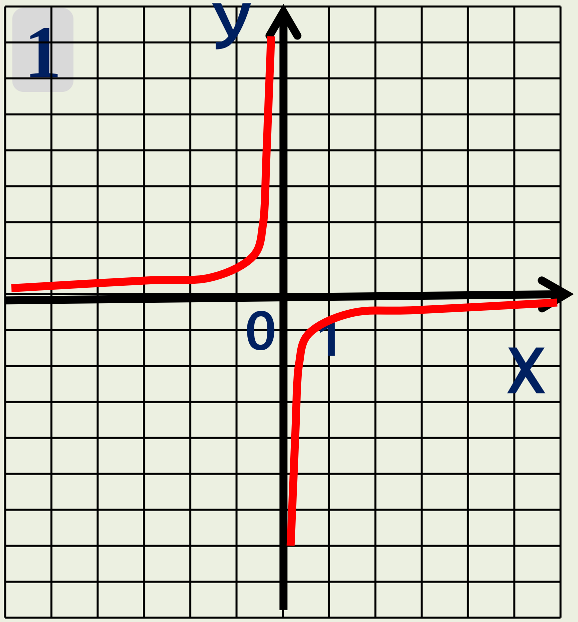
1) $y = \frac{2}{x}$

2) $y = \frac{1}{2x}$

3) $y = -\frac{2}{x}$

4) $y = -\frac{1}{2x}$

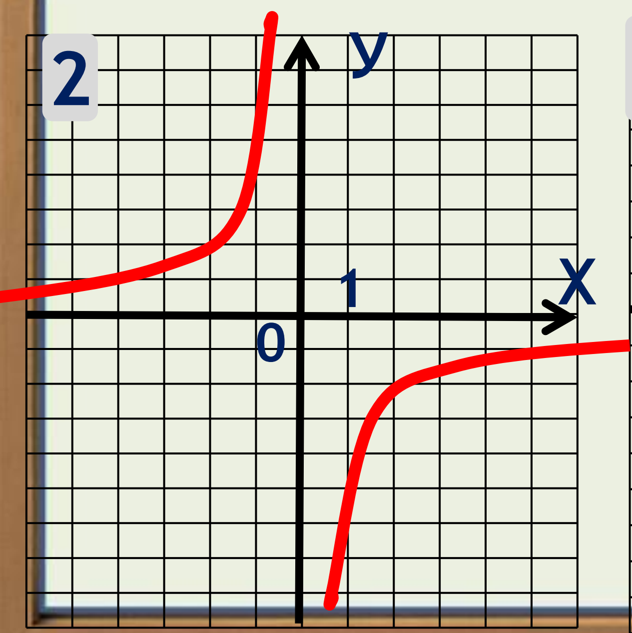
Решите самостоятельно.

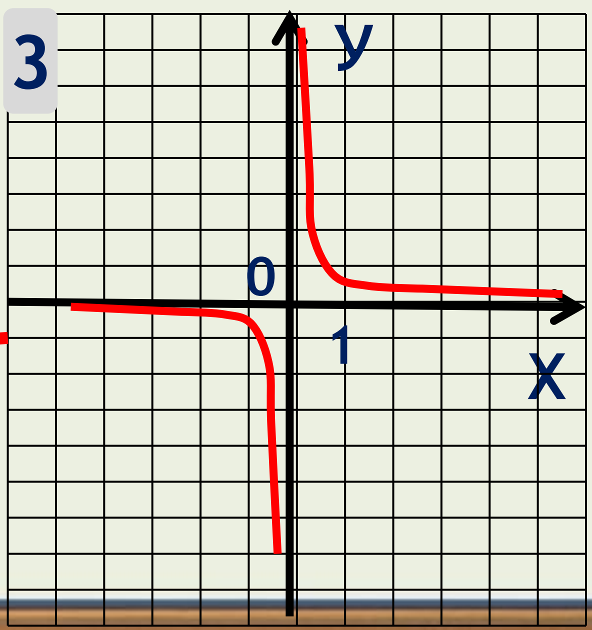


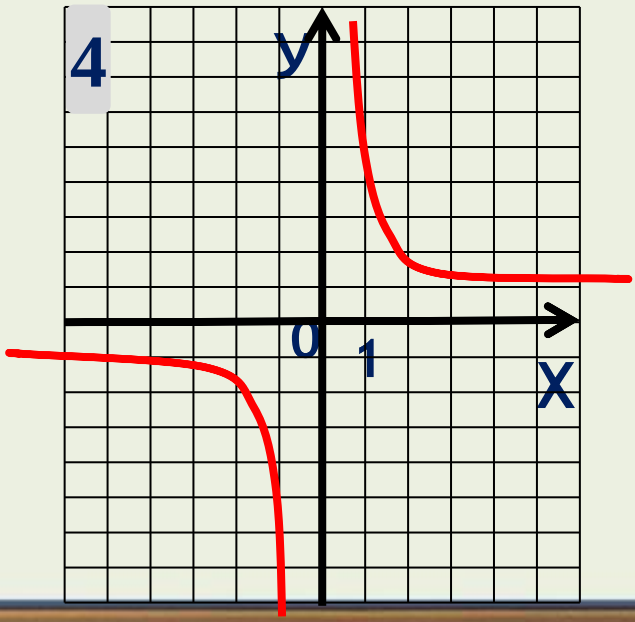
Установите соответствие между графиками и формулами, которые их задают.

Проверь себя

1) $y = \frac{4}{x}$ 2) $y = -\frac{4}{x}$ 3) $y = -\frac{1}{4x}$







Найдите значения коэффициентов по графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ изображенному на рисунке.

А(0, 4) ➡ $4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ ➡ $c = 4$ ➡

Для того, чтобы найти коэффициент c, надо найти ординату точки пересечения графика функции с осью ОУ.

Найдем коэффициент $\boldsymbol{a}$. Для этого определяем координаты вершины (m; n)

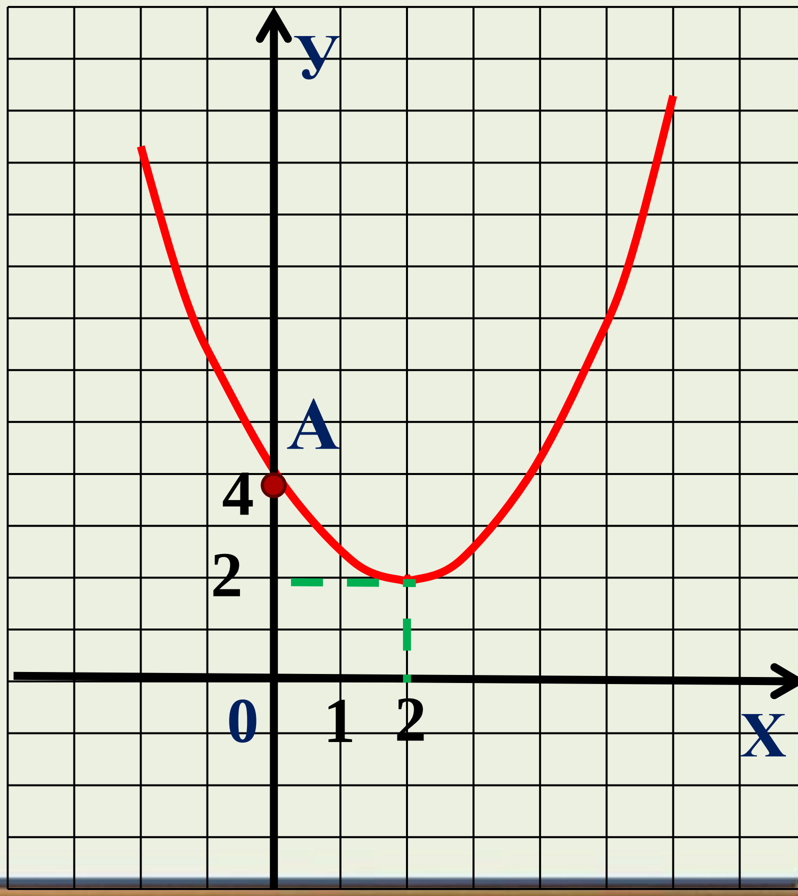
m= 2 n= 2

Определяем координаты любой точки А (0;4)

Подставляем эти значения в формулу квадратичной функции, заданной в ином виде: $y = a(x - m)^2 + n$

$4 = a(0-2)^2 + 2$ ➡ $4 = 4a + 2$ ➡

$4 - 2 = 4a$ ➡ $a = 0,5$

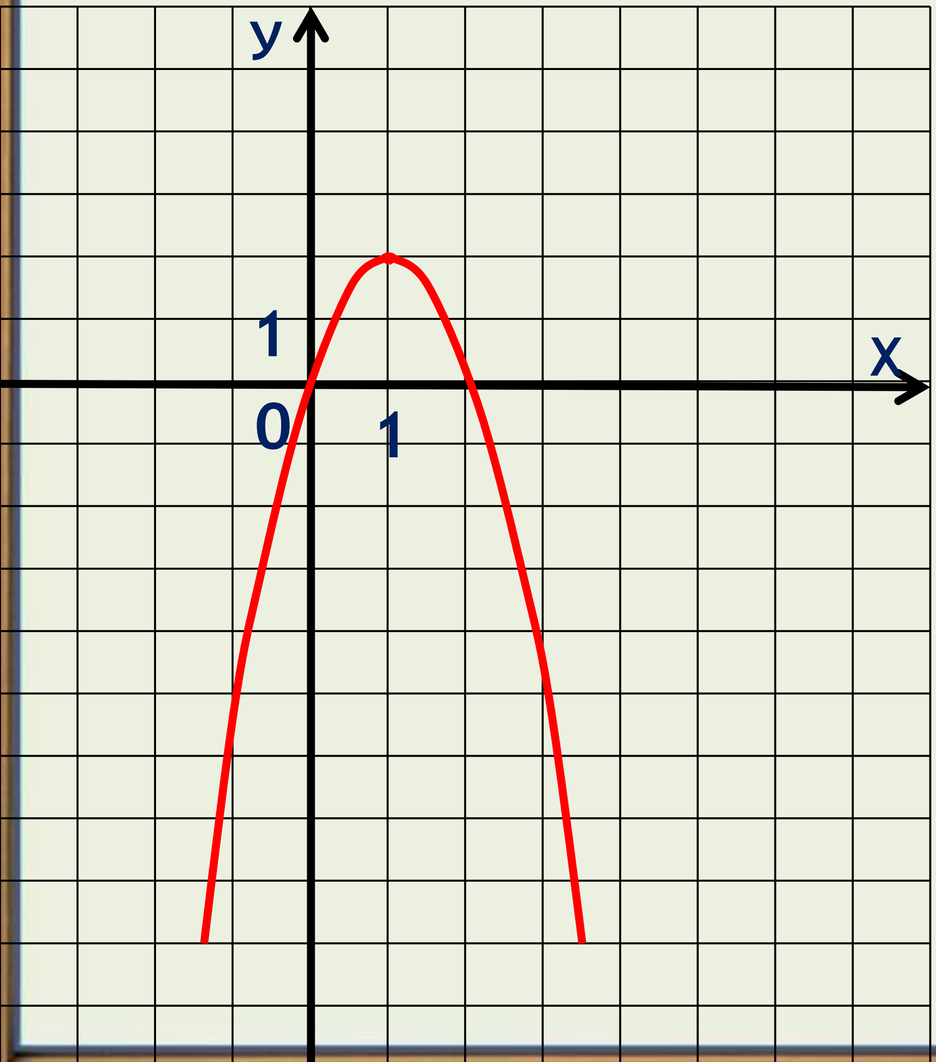


Для нахождения коэффициента b, воспользуемся формулой для нахождения абсциссы вершины параболы ➡

$m = \frac{-b}{2a}$ ➡ $2 = \frac{-b}{2 \cdot 0,5}$ ➡ $b = -2$

Решите самостоятельно.

1. Найдите значения коэффициентов по графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ изображенному на рисунке.



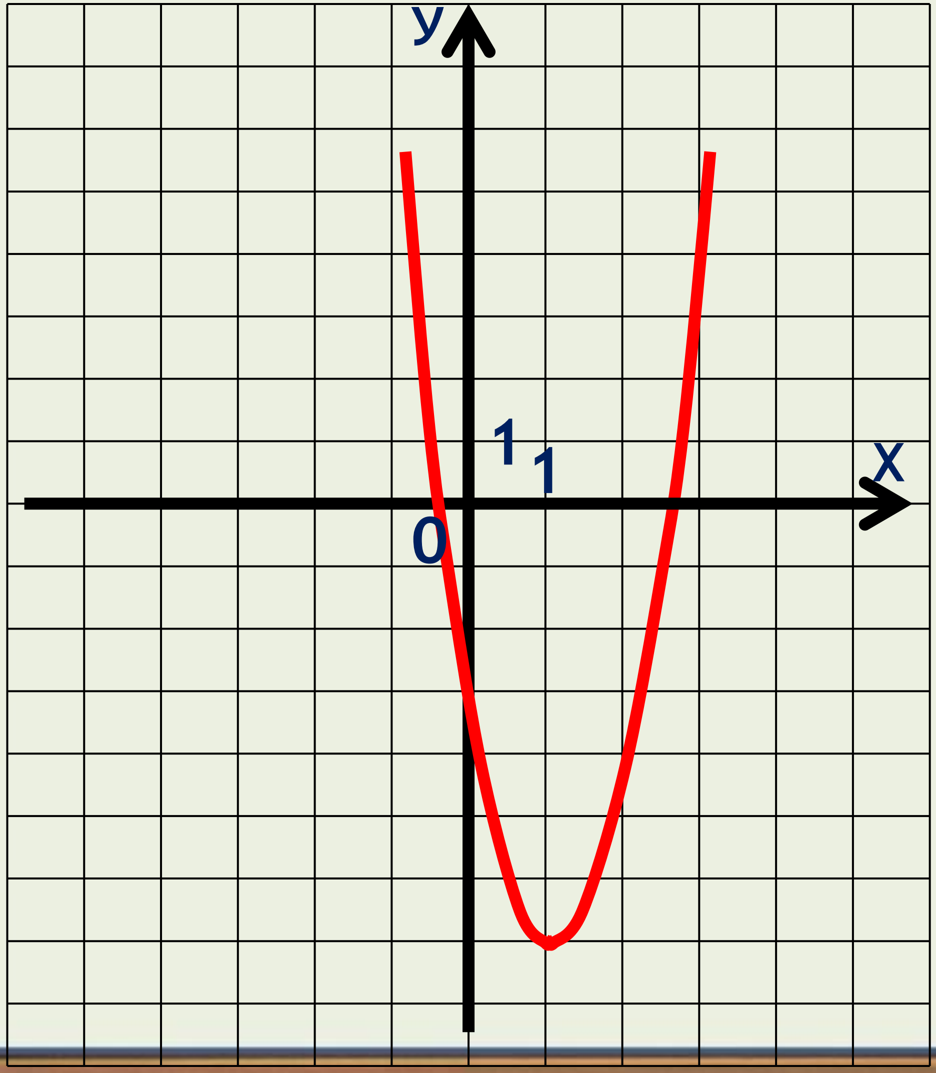
c = о

a = -2

b = 4

Проверь себя

2. *Найдите значения коэффициентов по графику квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$ *изображенному на рисунке.*



c = -3

a = 3

b = -6

Проверь себя

ОГЭ

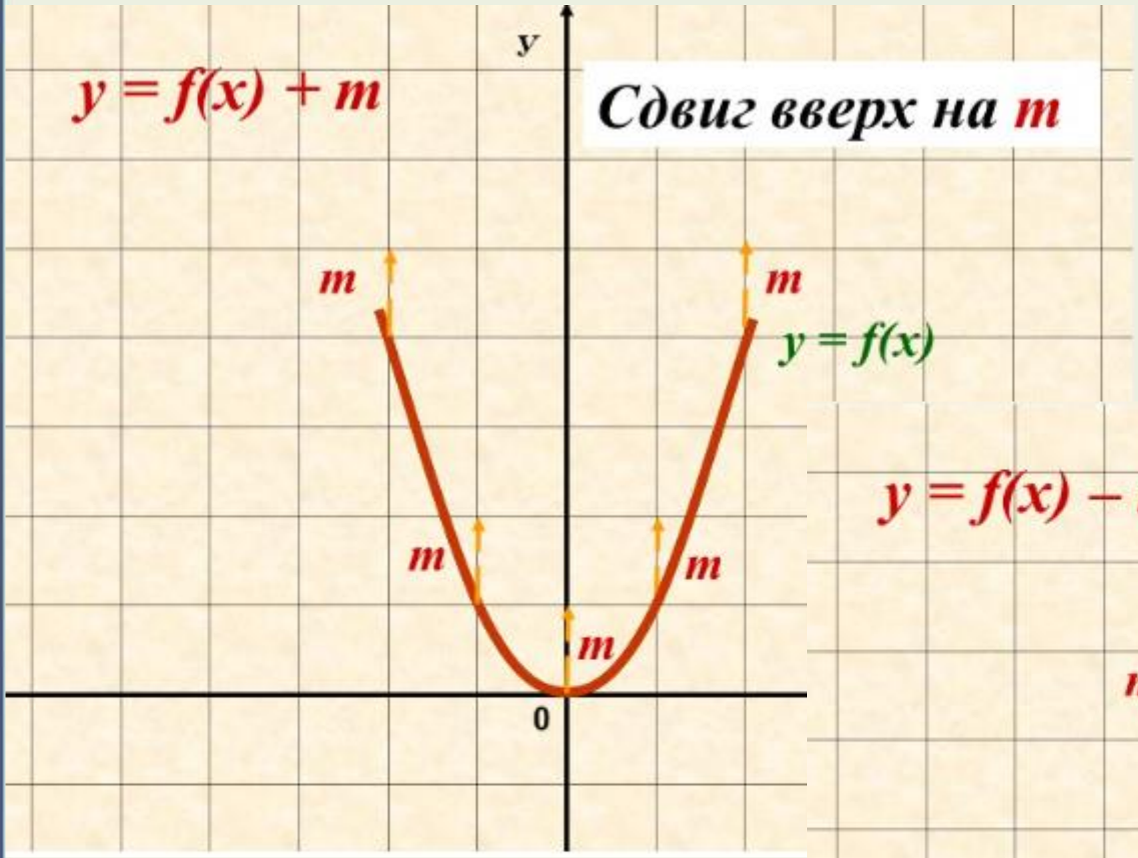
Задание 22

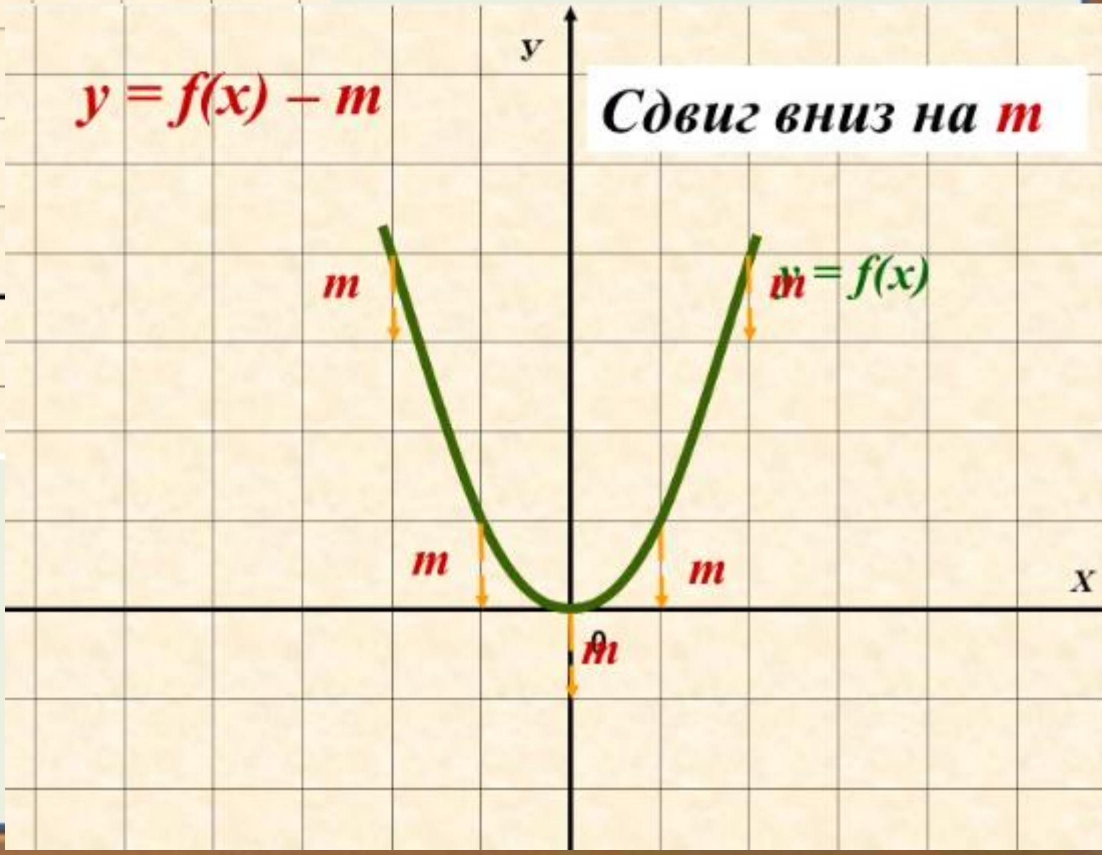
Элементарные преобразования графиков функций

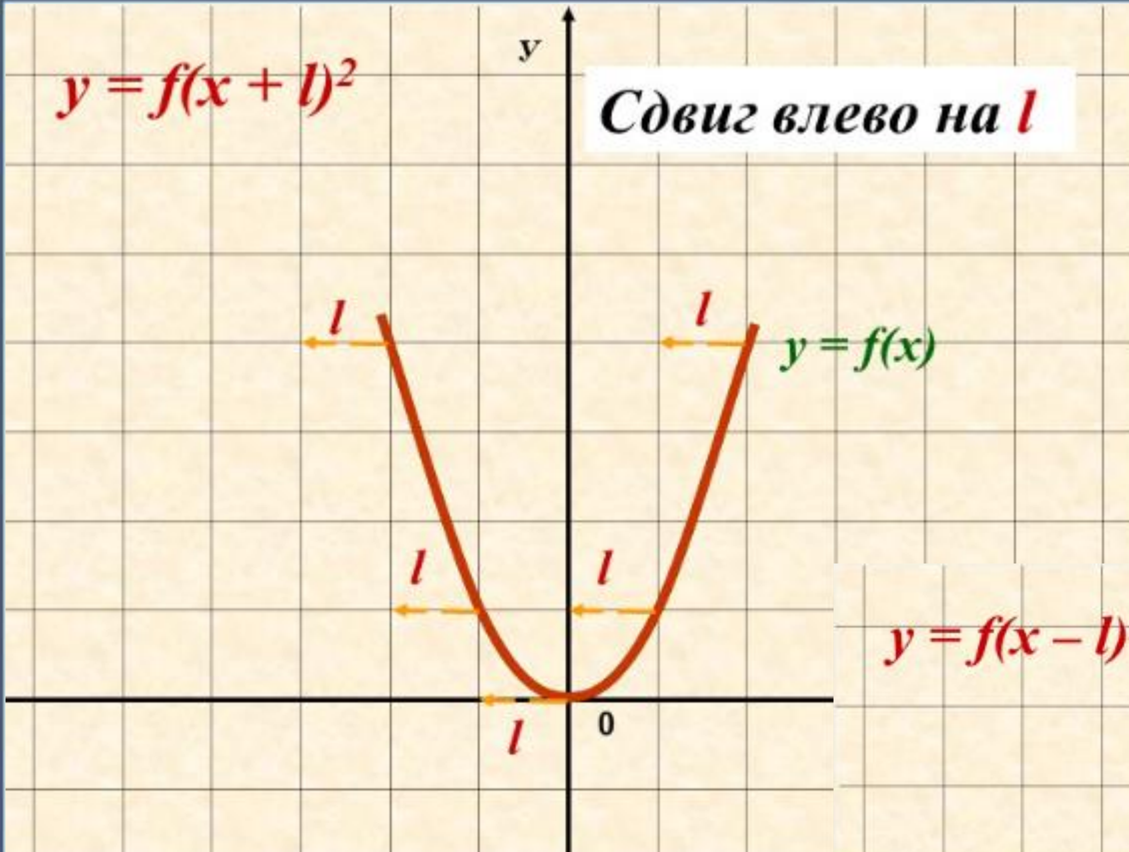
Сведём все рассмотренные преобразования в таблицу ($k > 0$):

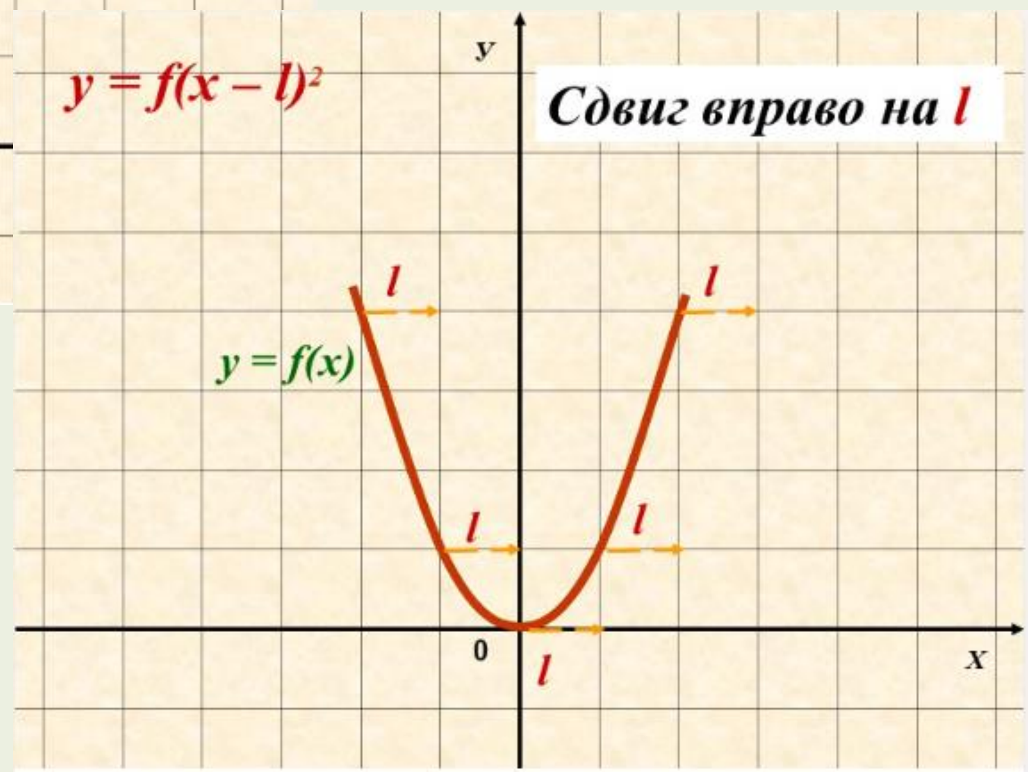
Функция	Преобразование
$y = f(x) + a$	Сдвиг на a по вертикали (или вдоль оси Oy)
$y = f(x + a)$	Сдвиг на a по горизонтали (или вдоль оси Ox)
$y = kf(x)$	Растяжение в k раз по вертикали (или вдоль оси Oy)
$y = f(kx)$	Сжатие в k раз по горизонтали (или вдоль оси Ox)
$y = -f(x)$	Отражение относительно оси Ox
$y = f(-x)$	Отражение относительно оси Oy

Построение графиков функции со сдвигом

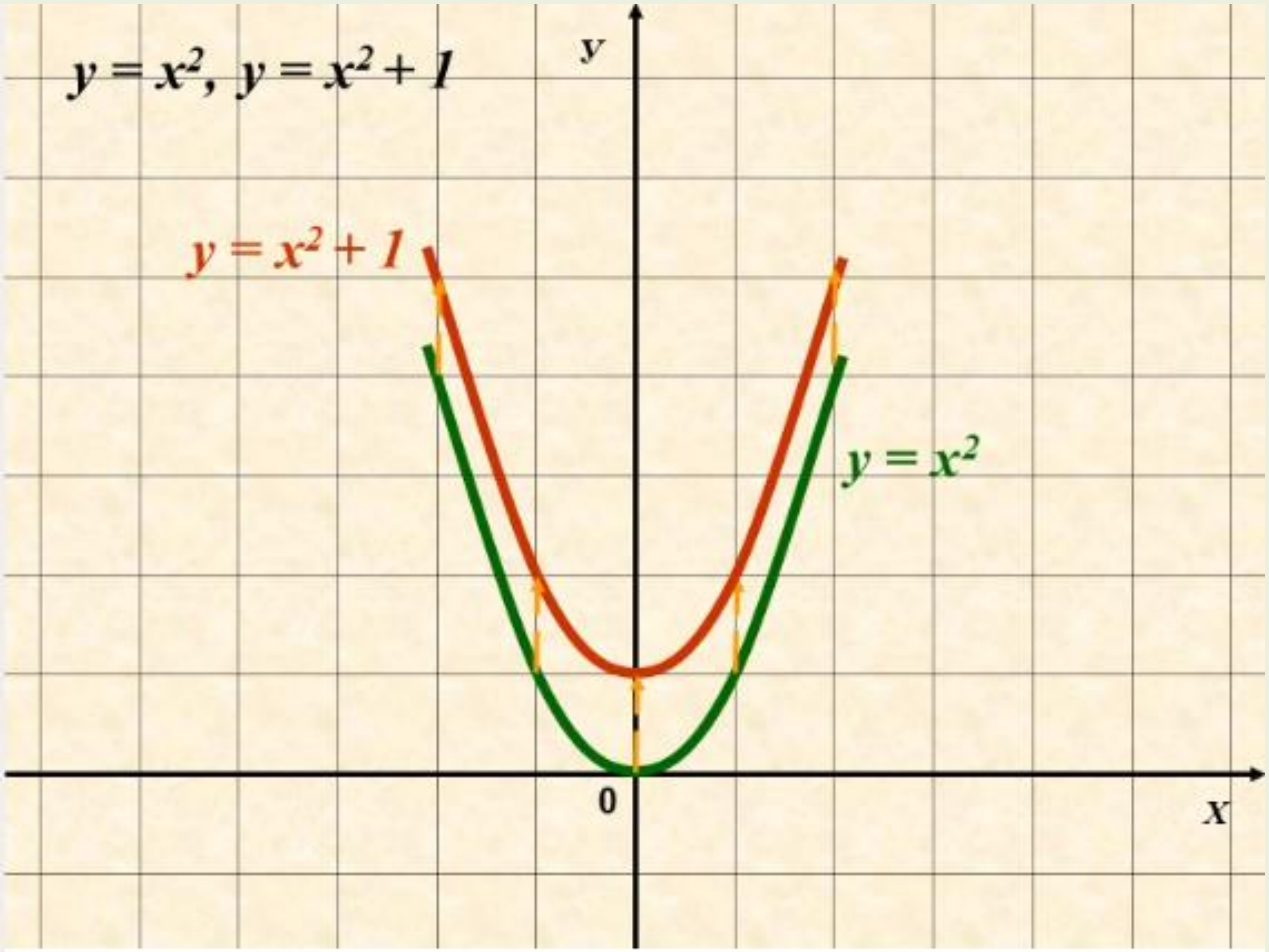




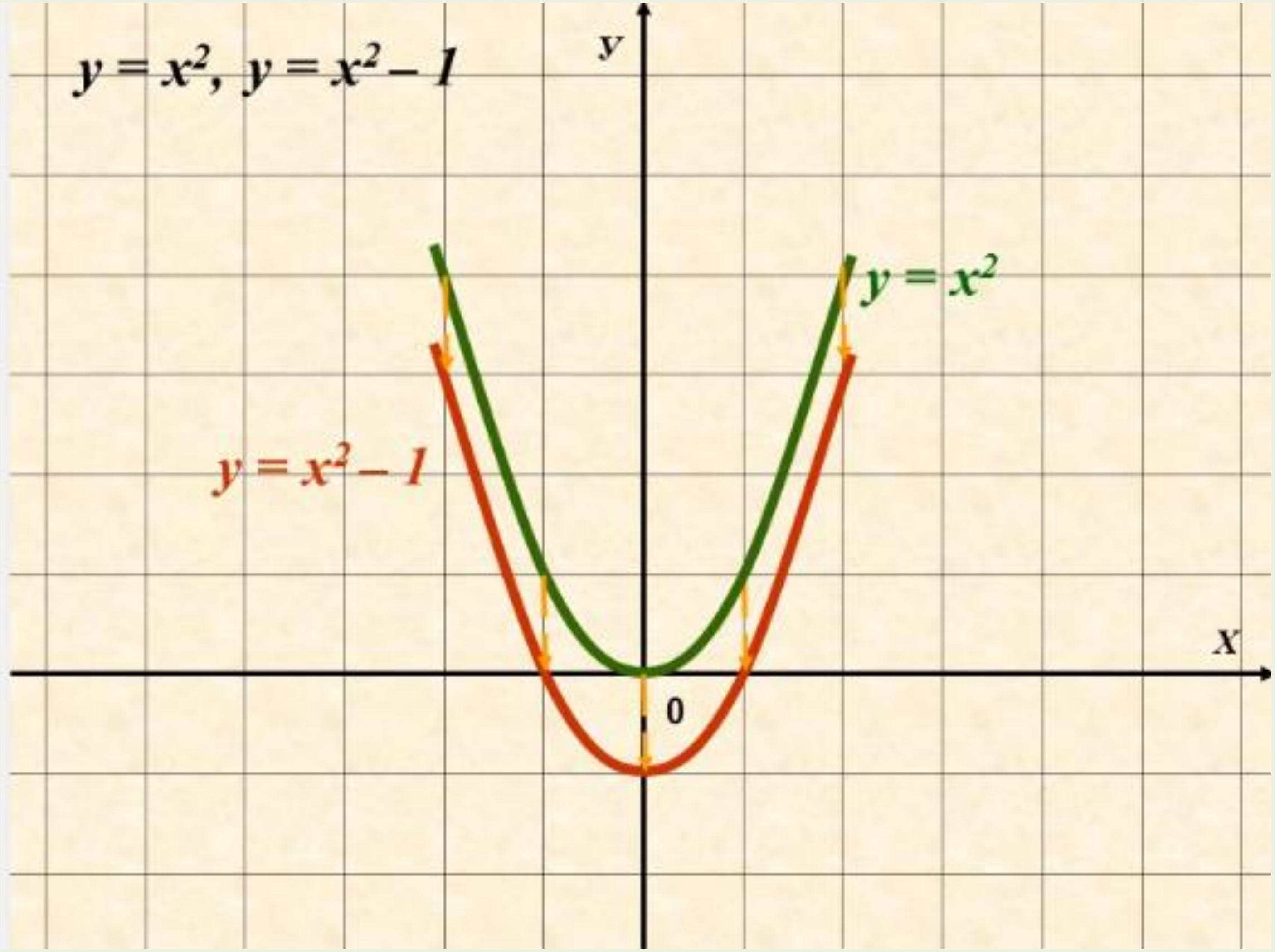

y = f(x + l)²
Сдвиг влево на l
y
l
l
y = f(x)
l
l
0
l


y = f(x – l)²
Сдвиг вправо на l
y
l
l
y = f(x)
l
l
0
l
x

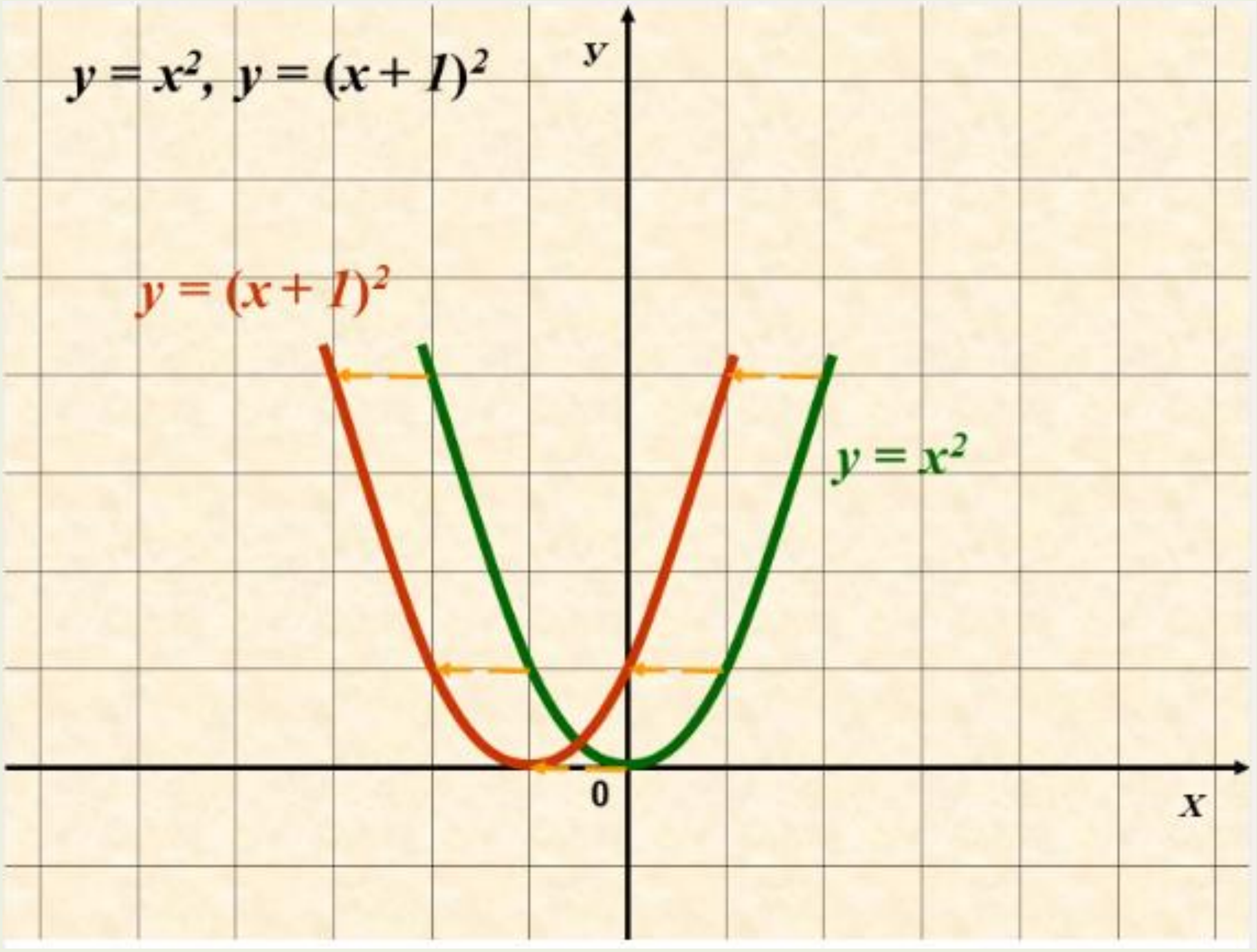
Каждая контрольная точка графика $y = x^2$ сдвигается вверх на 1



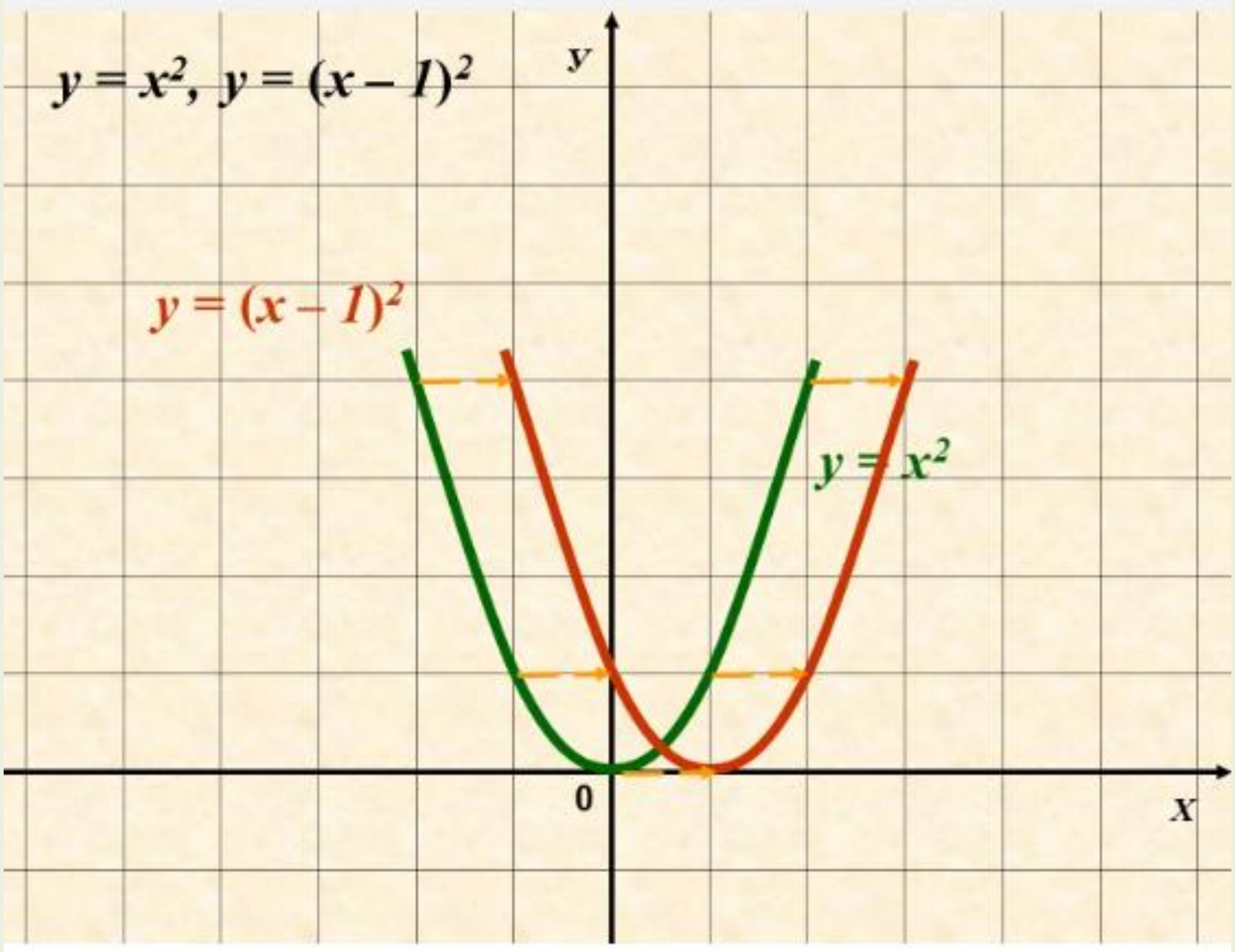
Каждая контрольная точка графика сдвигается вниз на 1



Каждая контрольная точка графика сдвигается влево на 1

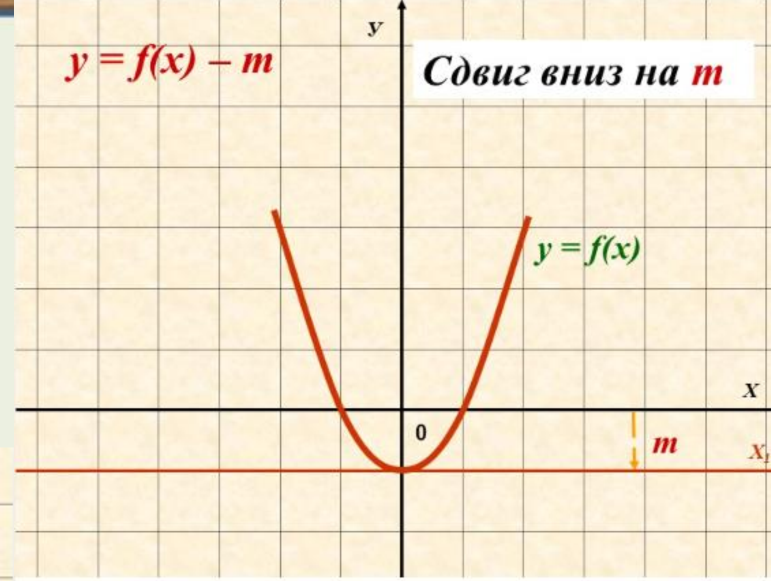


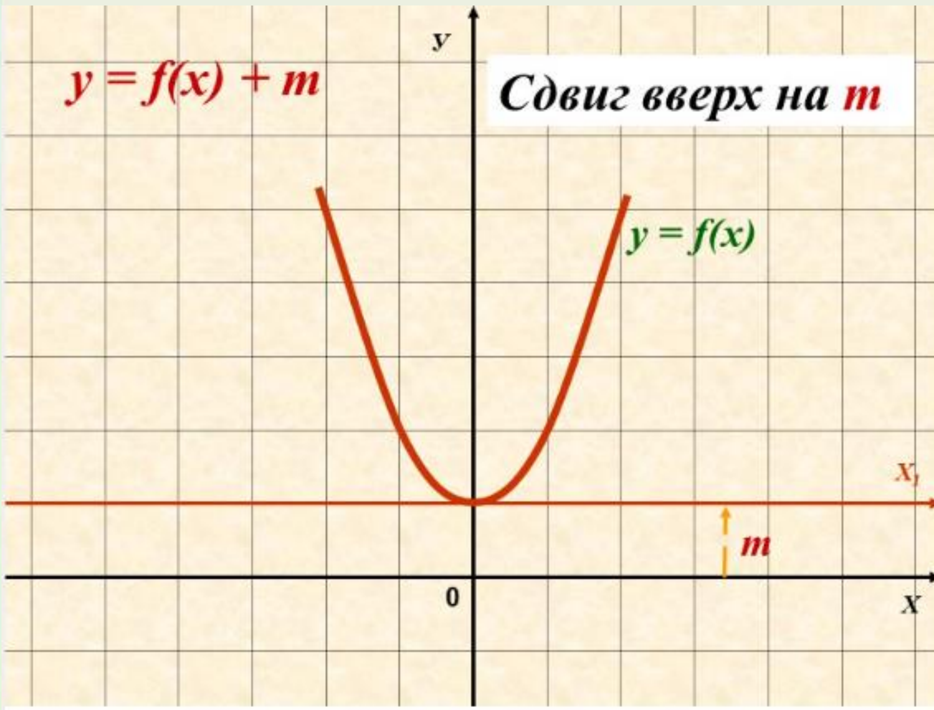
Каждая контрольная точка графика сдвигается вправо на 1

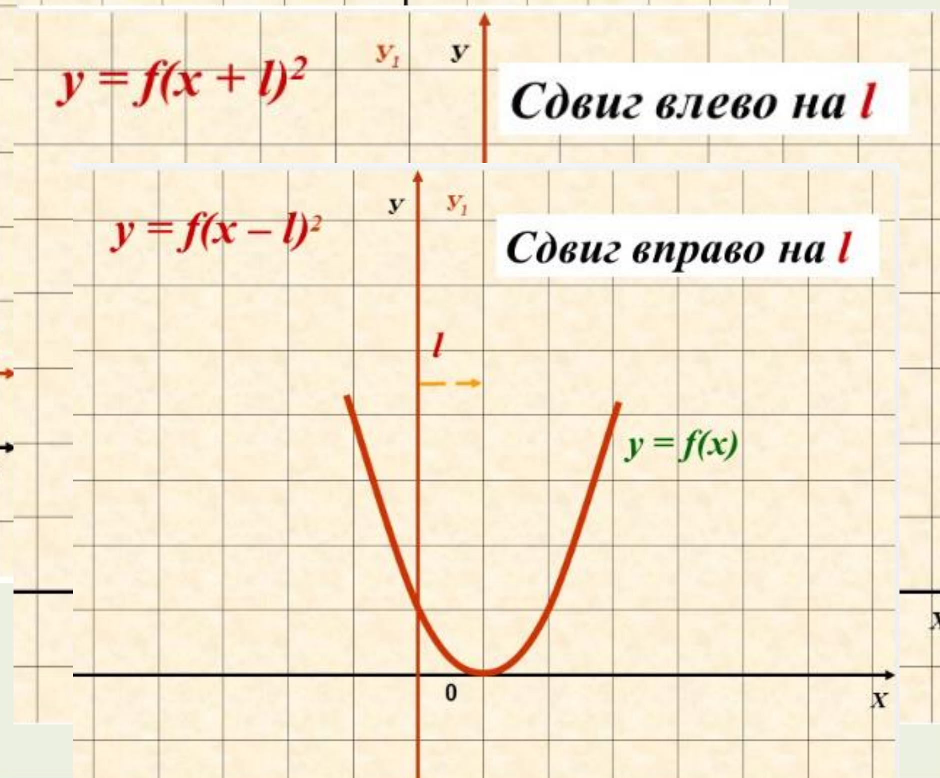


Второй способ построения

сдвиг осей координат







- Если квадратичная функция задана в виде

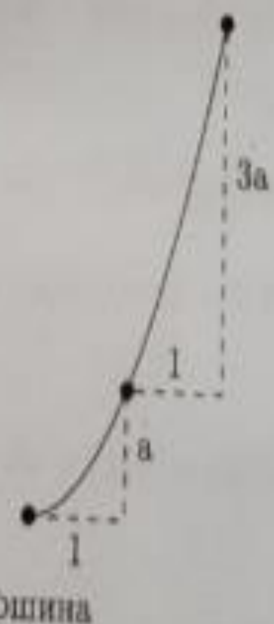
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

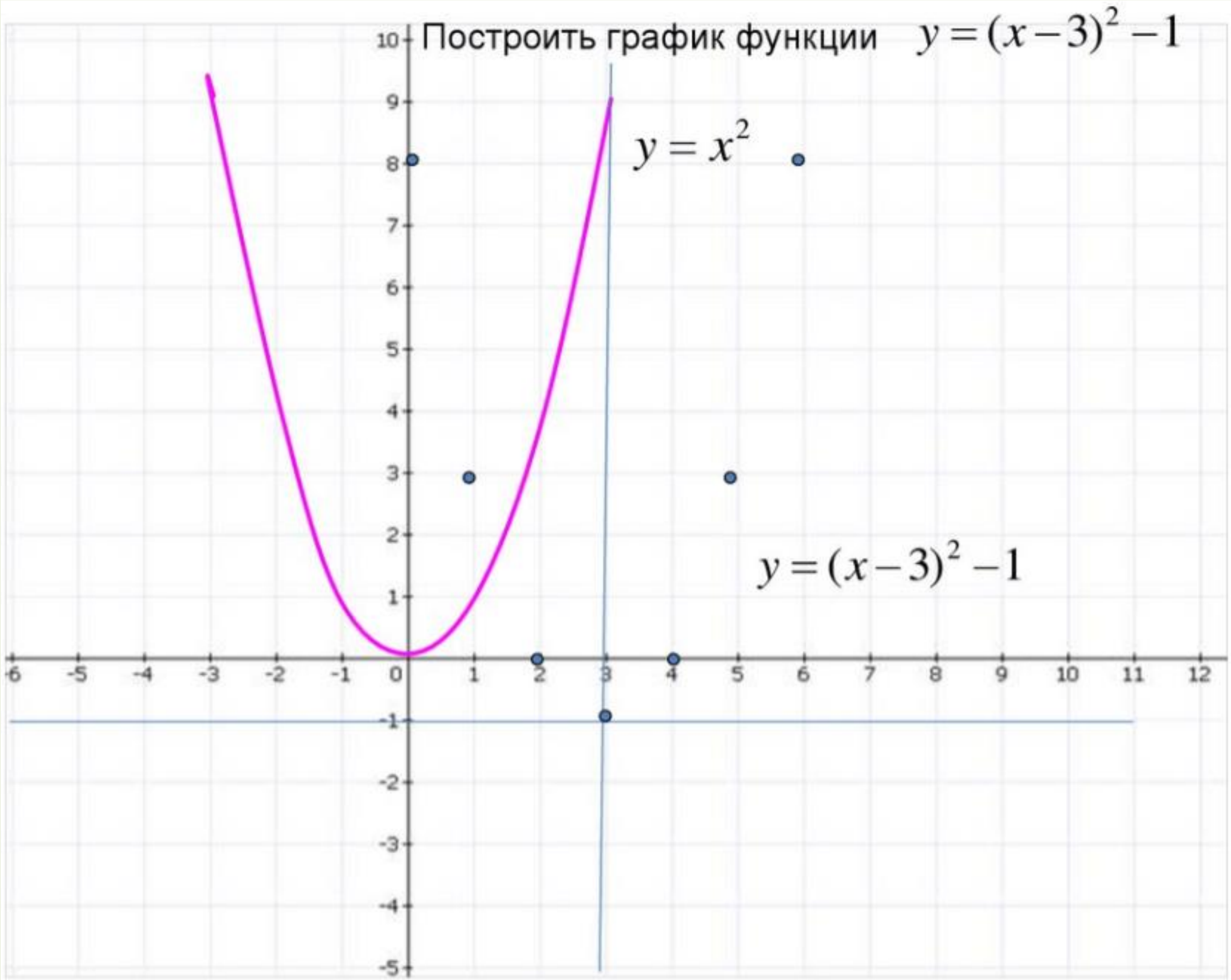
$$x_0 = \frac{b}{2a}$$

Возможное быстрое построение параболы

Если координаты вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ являются целыми числами, то можно быстро построить параболу.

Сначала отмечаем вершину параболы. После чего от этой вершины шаг вправо — a вверх, шаг вправо — $3a$ вверх. Провели правую ветвь параболы через эти точки, отзеркалили и получили параболу. На рисунке это будет выглядеть следующим образом.

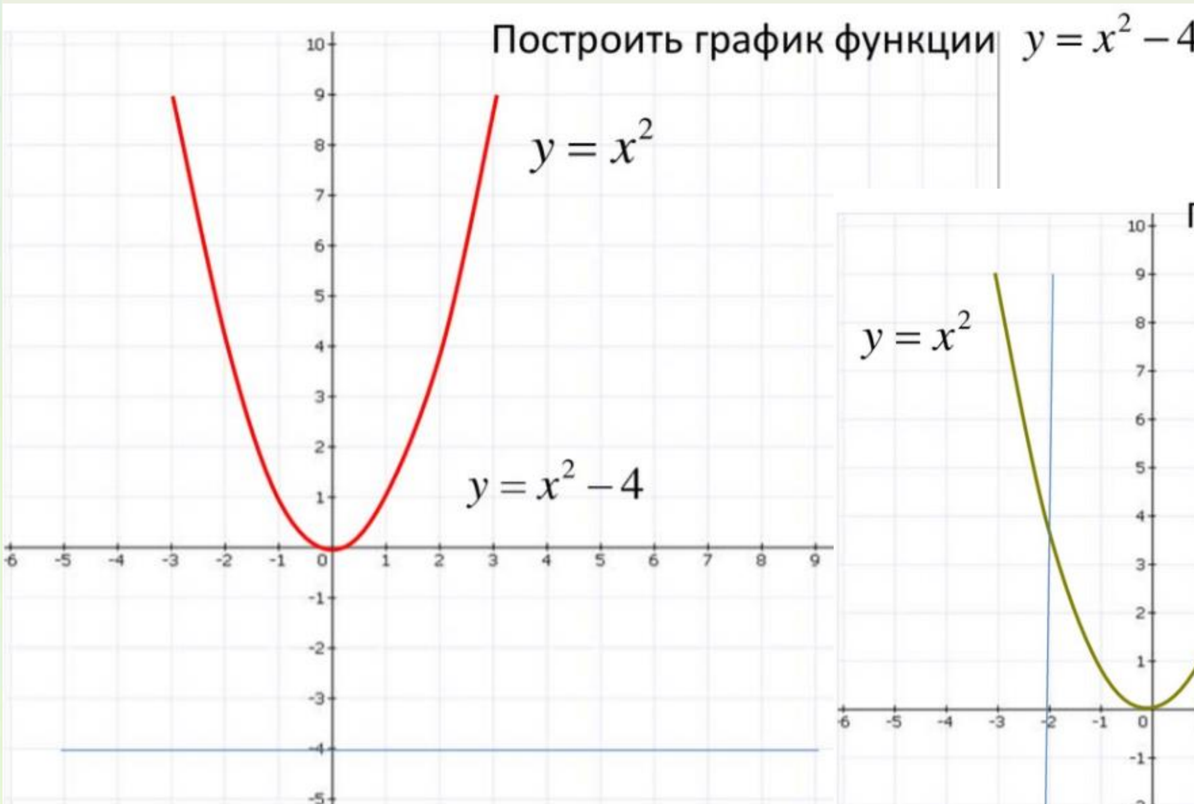


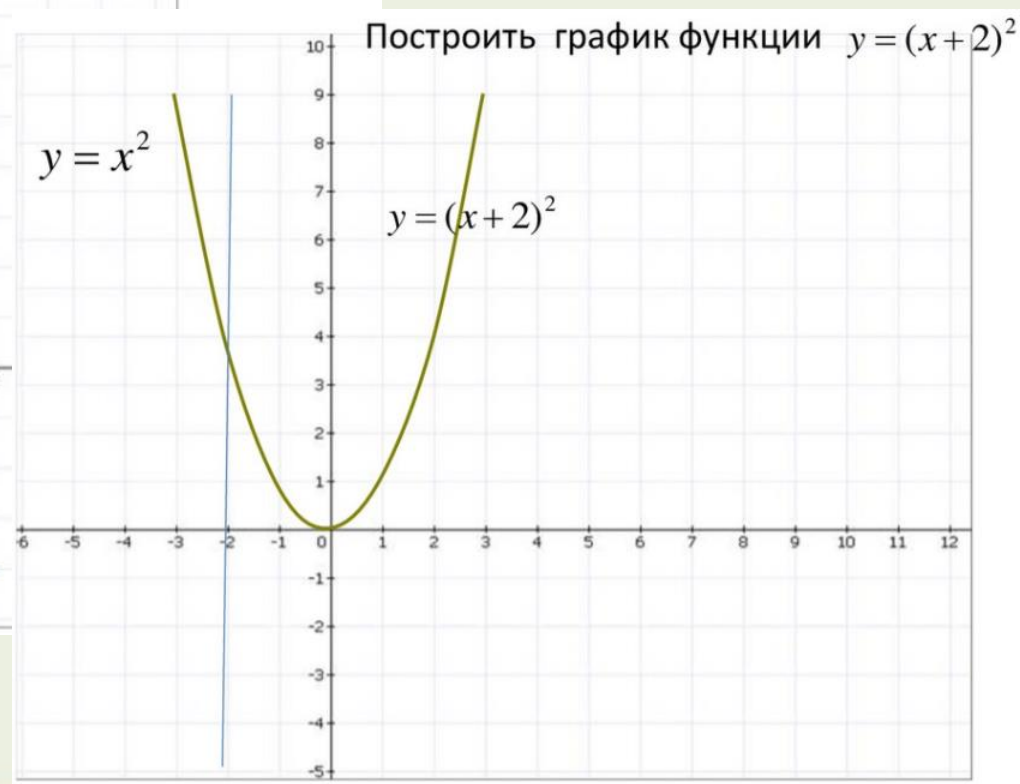

Построить график функции $y=(x-3)^2-1$
$y=x^2$
$y=(x-3)^2-1$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

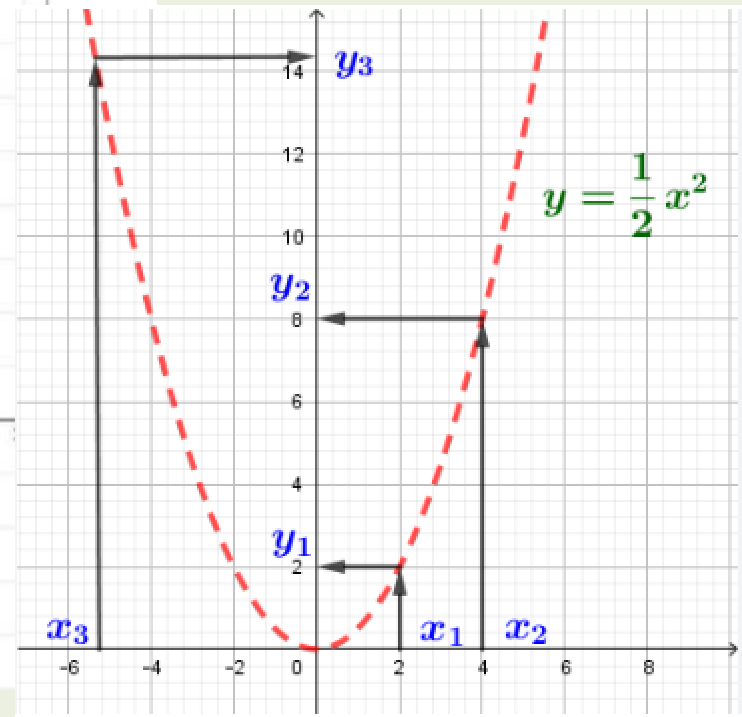
ЗАДАНИЕ в ТЕТРАДИ

Построить график функции $y = x^2 - 4$

Построить график функции $y = (x+2)^2$





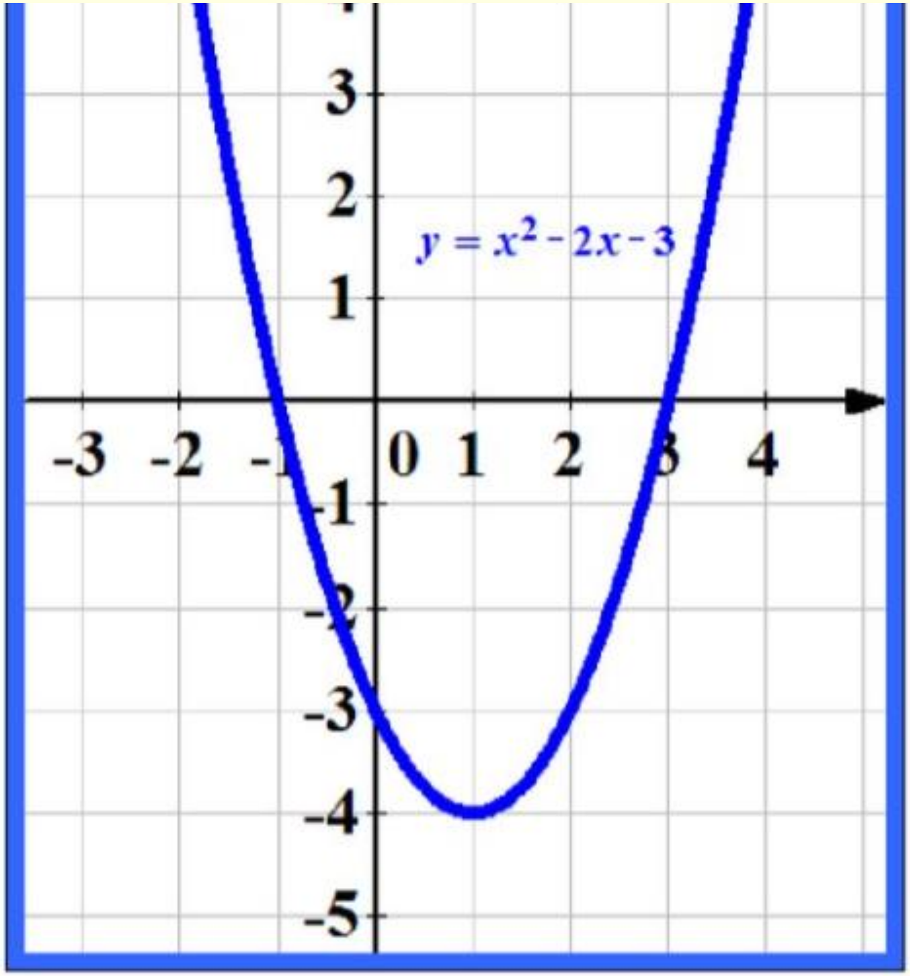


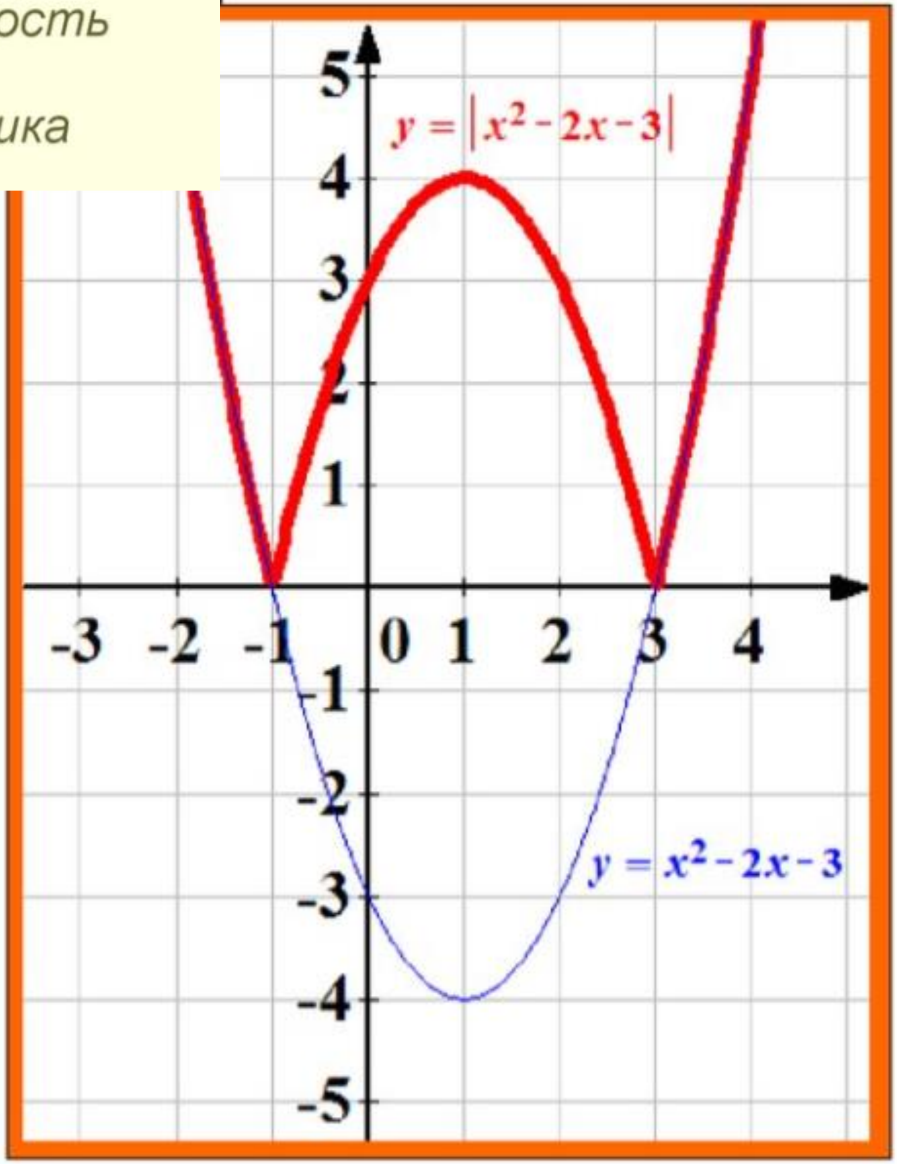
Построить график функции $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$

График функции y=kf(x), где k>0, можно получить заменив каждую точку f(x) на точку с такой же абсциссой и ординатой умноженной на к

Преобразование вида $y = |f(x)|$

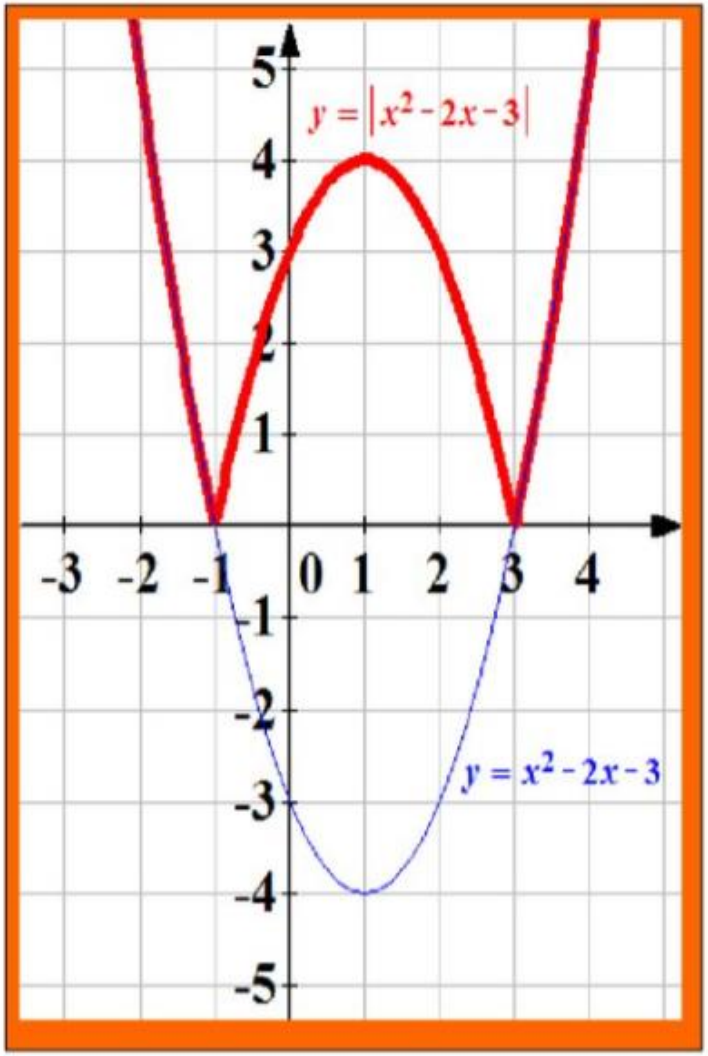
— *Это отображение нижней части графика функции $y = f(x)$ в верхнюю полуплоскость* ***относительно оси абсцисс*** *с сохранением верхней части графика*





КАК записать шаги построения на ОГЭ

Построение графика функции $y = |f(x)|$



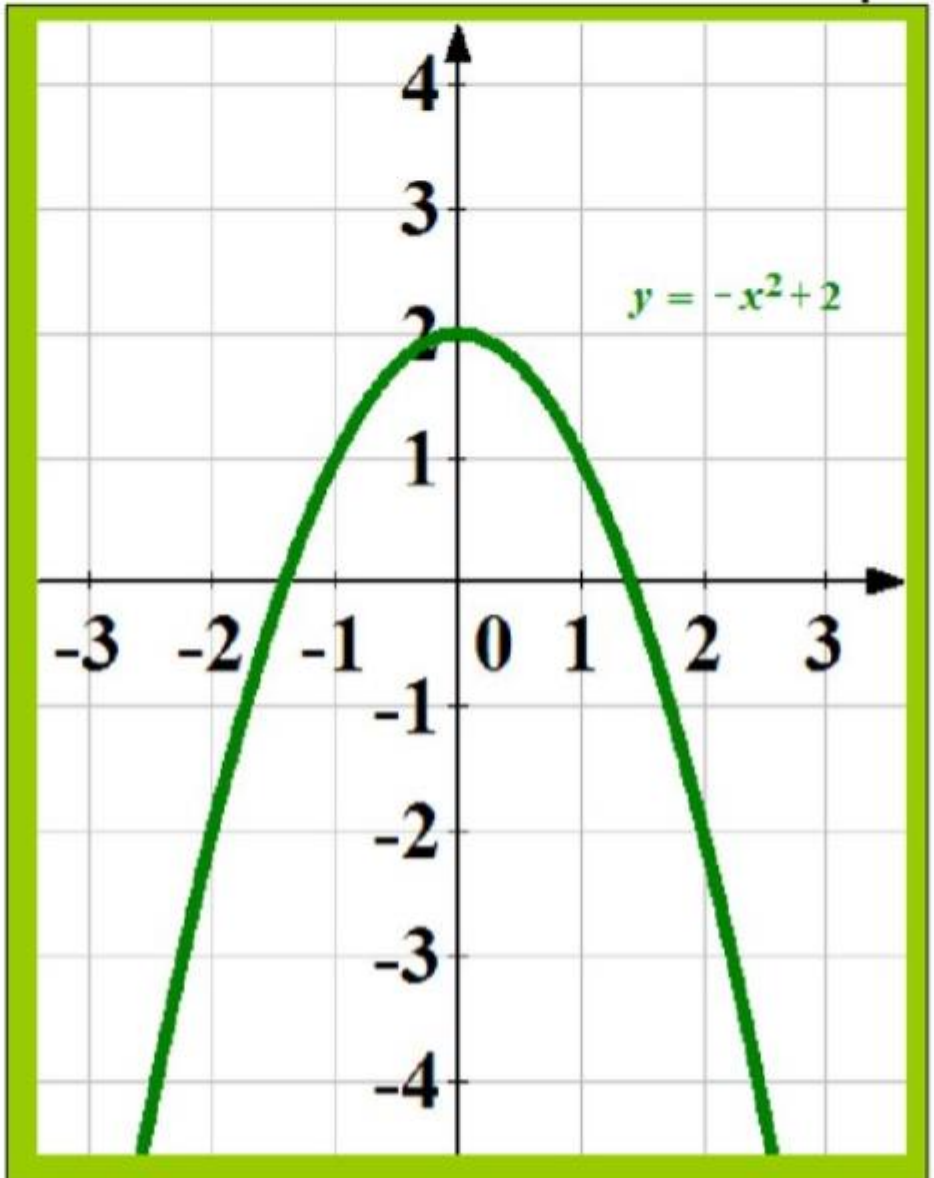
1. Построить график функции

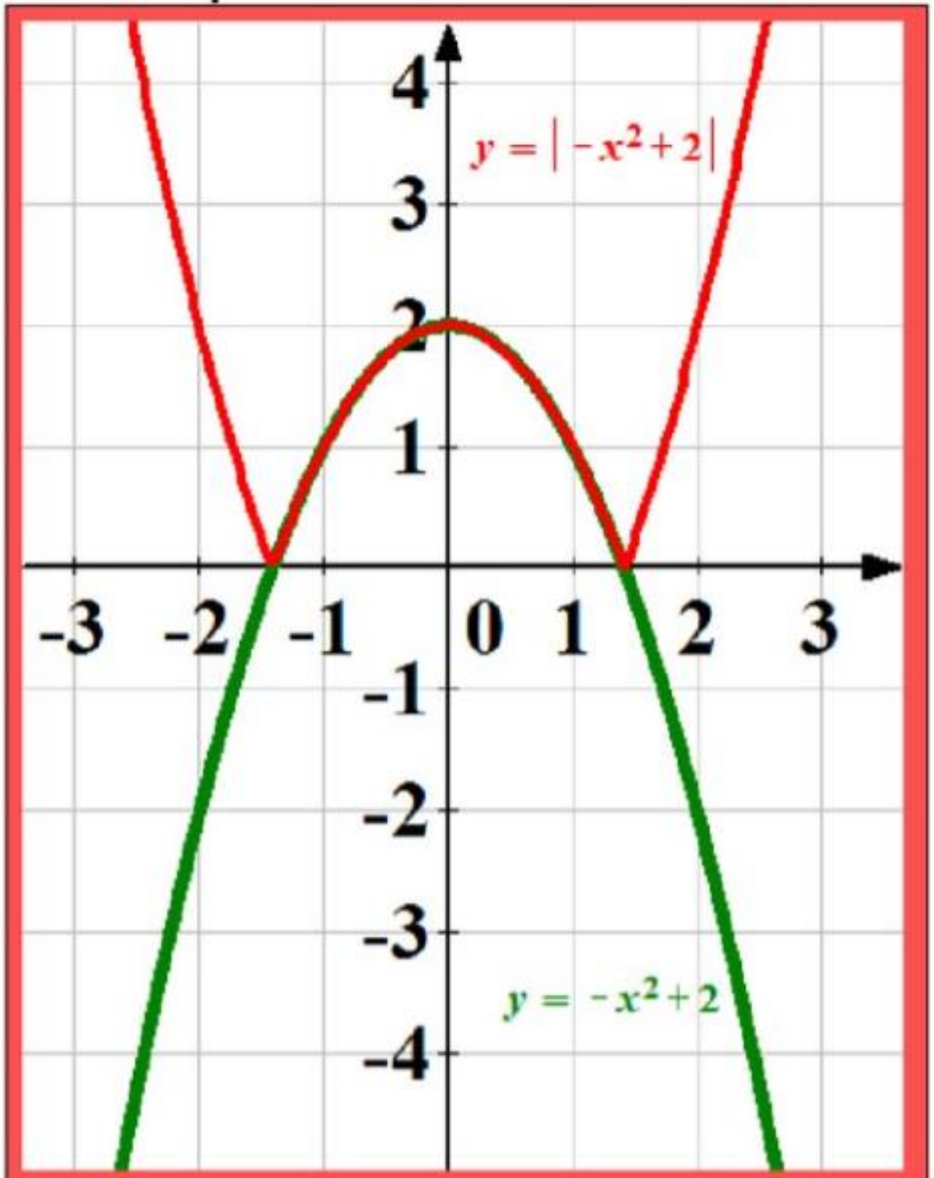
$$y = f(x)$$

2. Часть графика, где $f(x) \geq 0$ т.е в верхней полуплоскости, *оставить без изменения*.

3. Часть графика, которая расположена в *нижней полуплоскости, отобразить симметрично относительно оси абсцисс.*

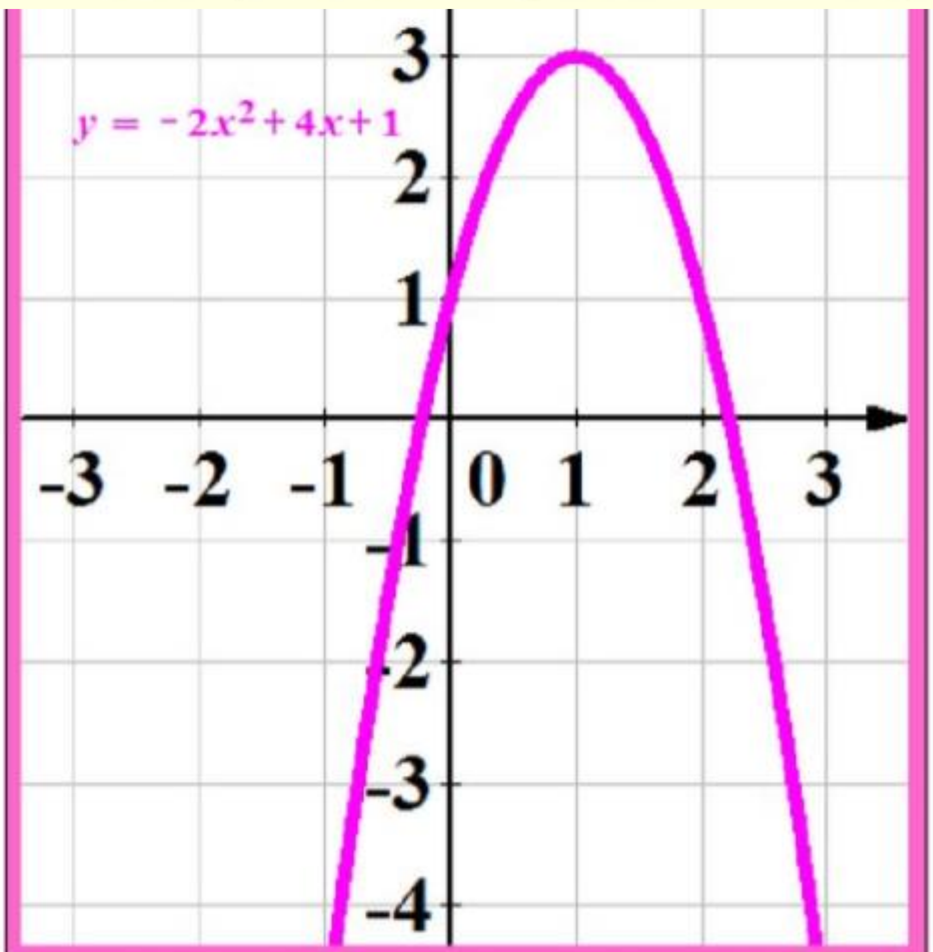
$$y = |f(x)|$$

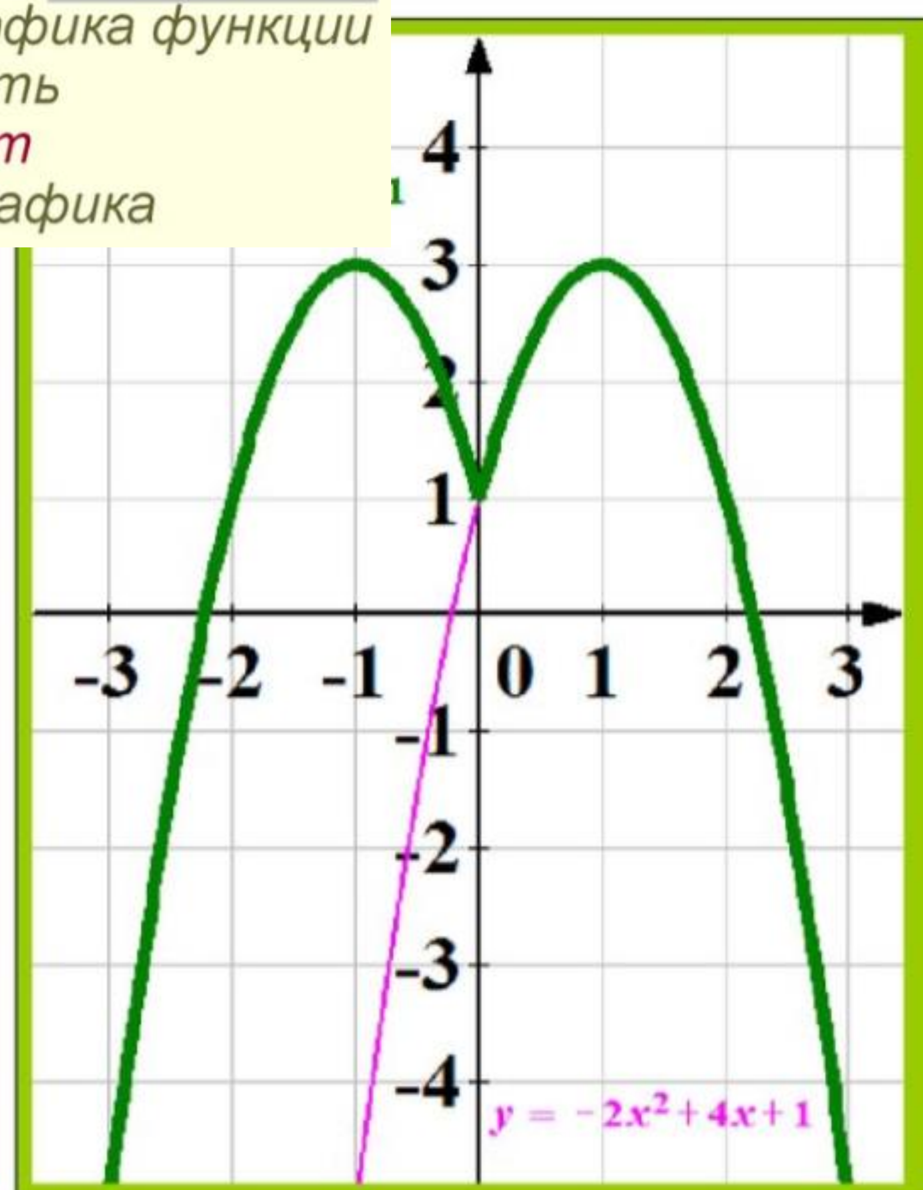




. Преобразование вида $y = f(|x|)$

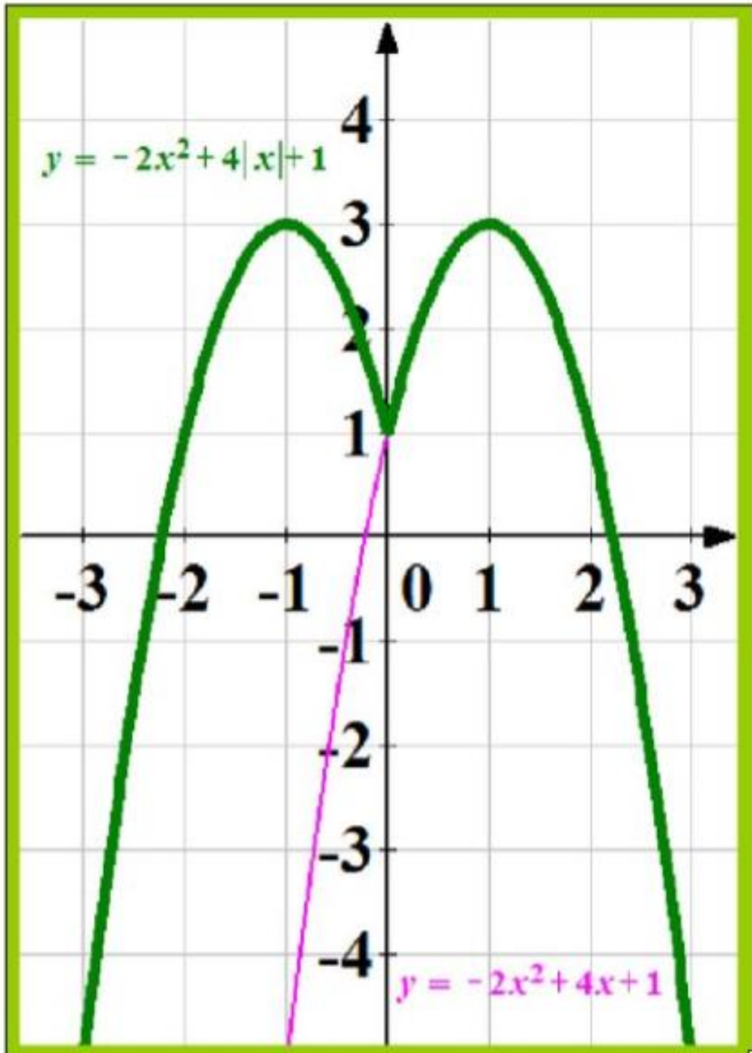
Это отображение правой части графика функции
$y = f(x)$ в левую полуплоскость
относительно оси ординат
с сохранением правой части графика





КАК записать шаги построения на ОГЭ

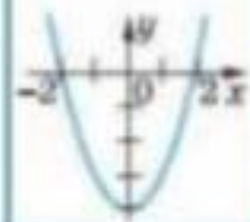
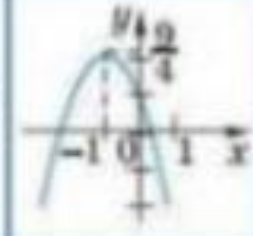
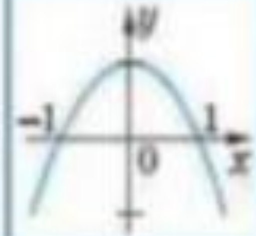
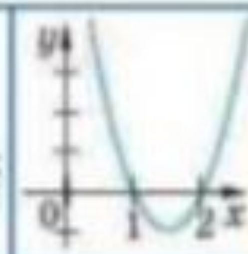
Построение графика функции $y = f(|x|)$



1. Построить график функции $y = f(x)$

2. Часть графика при $x \geq 0$, т.е *в правой полуплоскости, оставить без изменения и отобразить симметрично относительно ОУ*

Для каждой из функций, заданных в столбце, укажите ее график.

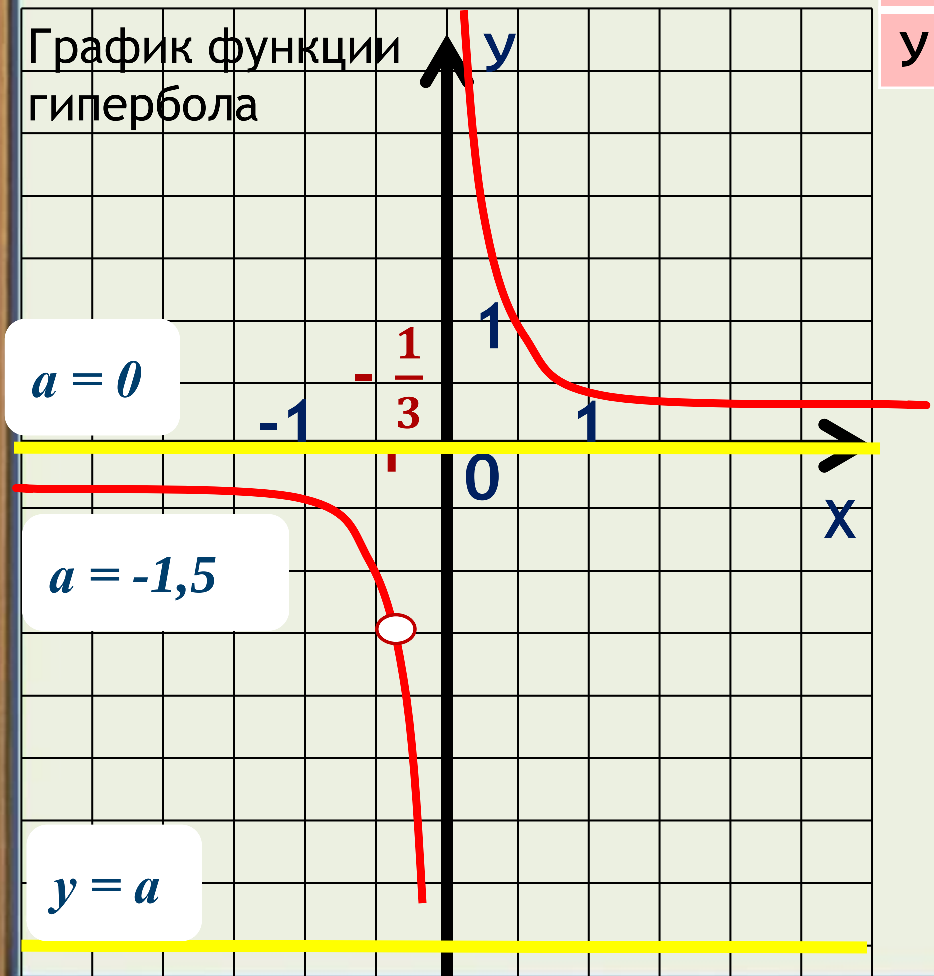
					
$y=1-x^2$	□	□	●	□	□
$y=x^2-4$	●	□	□	□	□
$y=-x^2-3$	□	□	□	□	●
$y=x^2-3x+2$	□	□	□	●	□
$y=-x^2-2x+1{,}25$	□	●	□	□	□

Постройте график функции $\boldsymbol{y = \frac{3x+1}{6x^2+2x}}$ ***и определите, при каких значениях параметра а прямая у = а не имеет с графиком общих точек.***

1. Преобразуем функцию: $y = \frac{3x+1}{6x^2+2x} = \frac{3x+1}{2x(3x+1)} = \frac{1}{2x}$, ОДЗ: $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$

2. Построим график функции $y = \frac{1}{2x}$

Х	1	0,5	2	-1	$-0,5$	-2
У	0,5	1	0,25	$-0,5$	-1	$-0,25$



Определим, при каких значениях параметра *а* прямая *у* = *а* (у=а II ОХ) не имеет с графиком общих точек.

1.При у=- 4 прямая *у* = *а* имеет с г.ф. одну общ.тчк и до выколотой точки до у=0; и после у=0 имеет одну общ.тчк.

Вывод: прямая *у* = *а* не имеет с графиком ни одной общей точки при ***а* = 0** и в "исключенной" точке $x = -\frac{1}{3}$.

Найдем соответствующую ординату:

$$y\left(-\frac{1}{3}\right) = -1,5; \qquad a = -1,5$$

Ответ: 0 и – 1,5.

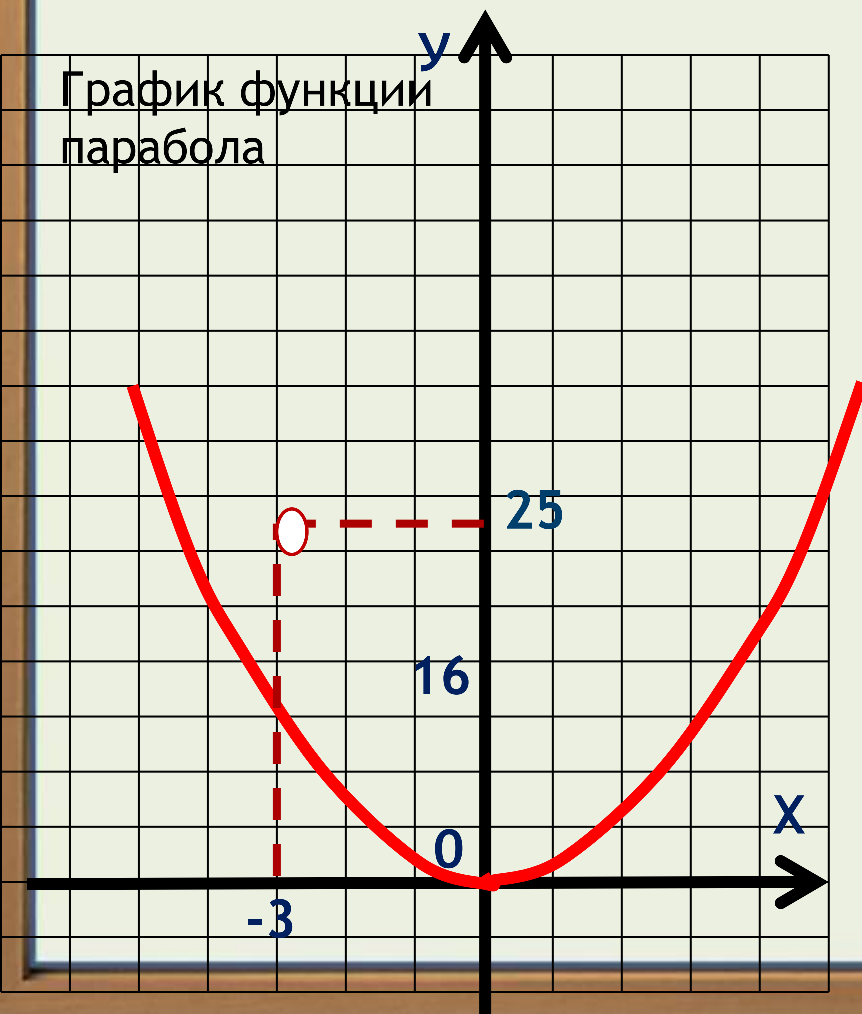
Постройте график функции $y = \frac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3}$ ***и определите, при каких значениях параметра k прямая y = kx не имеет с графиком общих точек.***

Преобразуем функцию

$$y = \frac{x^3+3x^2+16x+48}{x+3} = \frac{x^2(x+3)+16(x+3)}{x+3} = \frac{(x+3)(x^2+16)}{x+3} = x^2+16$$

1. Построим график функции $y = x^2+16$, учитывая ОДЗ: $x \neq -3$.

График получим из графика функции $y = x^2$, который сдвинем на 16 ед.отрезков вдоль оси ординат.



2. $X = -3$, найдем соответствующую ординату. $y = x^2+16$, $y = (-3)^2+16$, $y = 25$

Получили точку с координатами (-3;25).

Так как $y=kx$, получаем $25 = -3k$

$$k = -\frac{25}{3}$$

Очевидно, что прямая $y=kx$ не имеет общих точек с параболой, если:

- ➢ графики этих функций не пересекаются (1);
- ➢ в точке с абсциссой x= -3 (2).

1. Для того, чтобы найти значения параметра k при которых графики функций не пересекаются, рассмотрим систему $\begin{cases} y = kx \\ y = x^2+16 \end{cases}$

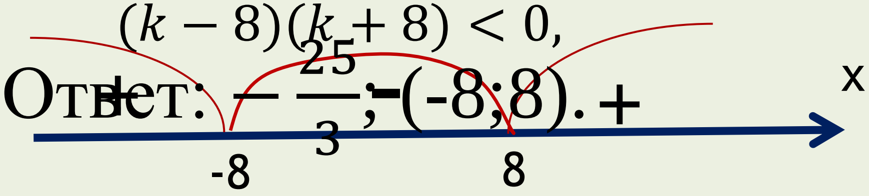
решим методом сложения, получим

$$x^2 - kx + 16 = 0$$

Нас интересуют такие значения параметра k, при котором уравнение не имеет корней, т.е. $Д < 0$.

$Д = k^2 - 4 \cdot 16$, $k^2 - 64 < 0$,

$(k-8)(k+8) < 0$,



$$k \in (-8; 8)$$

Ответ: $-\frac{25}{3}$; (-8;8).

Постройте график функции $y = -|x^2 + 2x - 8|$ ***и определите, при каких значениях параметра а прямая у=ах имеет с графиком три или более общих точек.***

построим график квадратичной функции $y = x^2 + 2x - 8$.

График парабола, $a > 0$ ветви вверх,

вершина: $m = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1$ $n = (-1)^2 + 2(-1) - 8 = -9$ (-1;-9)

Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс: у=0, $x^2 + 2x - 8 = 0$

Д=36, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Построим параболу.

Чтобы получить график функции $y = |x^2 + 2x - 8|$ надо учитывать, что для этой функции $y \geq 0$.

Нам нужно построить график функции $y = -|x^2 + 2x - 8|$, следовательно: $y \leq 0$.

Найдем значения параметра *а* , чтобы прямая *у=ах* (у=а II ОХ) имеет с графиком три или более общих точек:

ПРИ у=-10 две об.точки;

у= -9 три об.точки; у= -7 четыре тчк.;

И далее до у=0 будет 4 общ.точки;

Следовательно $a \in [-9; 0)$ Ответ: $[-9; 0)$

Постройте график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ ***и определите, при каких значениях параметра а прямая у=а имеет с графиком ровно две общие точки.***

Воспользуемся определением модуля числа: $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

и преобразуем функцию: $y = \begin{cases} x \geq 0,\ x^2 - 4x + 3 & (1) \\ x < 0,\ x^2 + 4x + 3 & (2) \end{cases}$, построим график каждой функции.

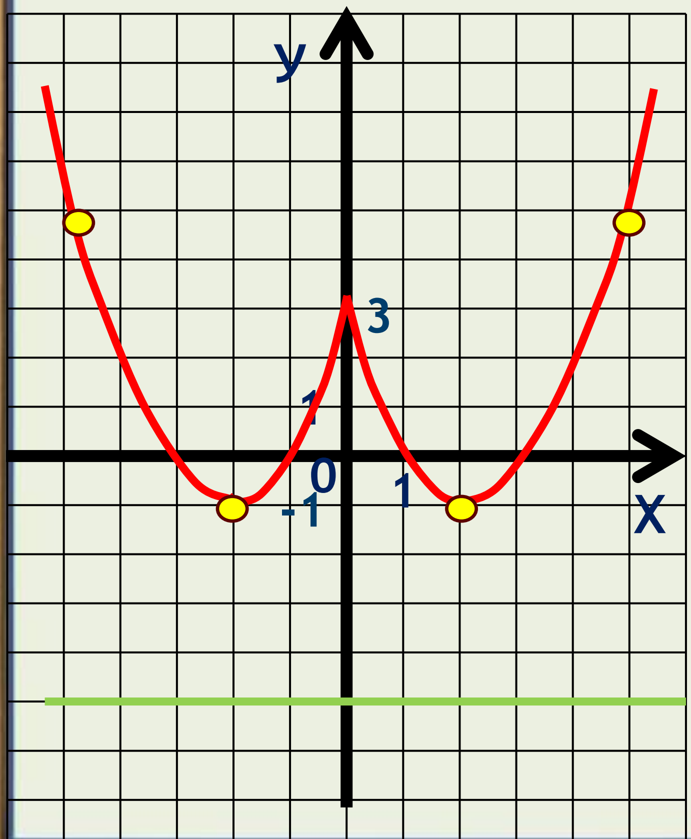
1. $x \geq 0$, $y = x^2 - 4x + 3$, квадратичная функция,

график парабола, ветви ↑ ($a > 0$).

$m = \frac{4}{2} = 2$, $n = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$, (2;-1)

Найдем точки нули функции: (1;0), (3;0).

Строим график.



2. График функции при $x < 0$, симметричен построенной параболе относительно оси ординат.

при каких значениях параметра *а* прямая у=*а* имеет с графиком ровно две общие точки:

при y = -1, y=a II OX имеет две общие точки

при y=0, имеет три общ.точки, и до y=3 три об.тчк; При y=4 и до бесконечности имеет две об.тчк. $a \in (3; +\infty)$

Ответ: -1; (3;+∞)

Постройте график функции:

$$y=\frac{1}{2}\left(\left|\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}\right|+\frac{x}{3,5}+\frac{3,5}{x}\right)$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

ОДЗ: Х не равен 0 $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

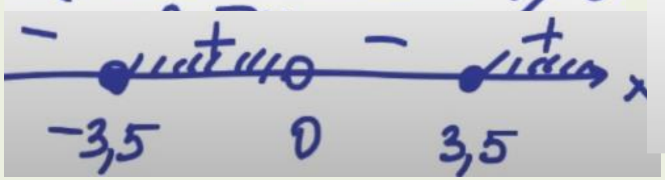
1) $\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}\geqslant 0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3,5}-\cancel{\frac{3,5}{x}}+\frac{x}{3,5}+\cancel{\frac{3,5}{x}}\right)$

$\frac{x^2-3,5^2}{3,5x}\geqslant 0$

$y=\frac{x}{3,5}$ линейн., график прям.

$\frac{(x-3,5)(x+3,5)}{}\geqslant 0$

$[-3,5;0)\cup[3,5;+\infty)$



$y=\frac{x}{35}$

x	−3,5	3,5
y	−1	1

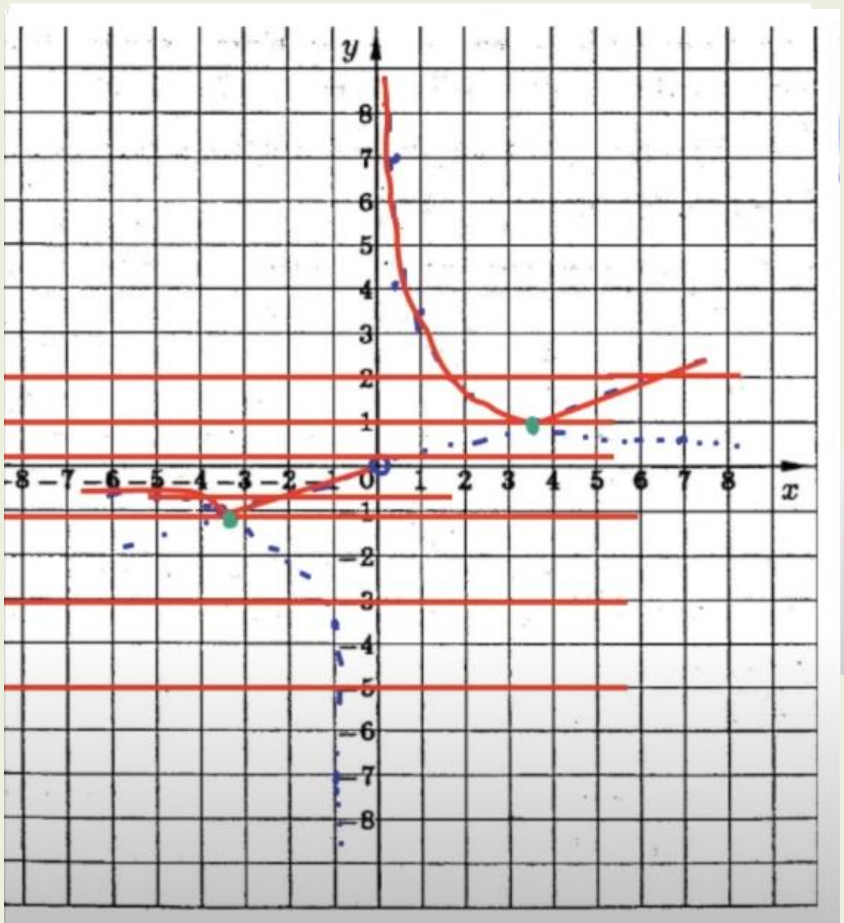
2) $\frac{x}{3,5}-\frac{3,5}{x}<0$

$(-\infty;-3,5)\cup(0;3,5)$

$y=\frac{1}{2}\left(-\cancel{\frac{x}{3,5}}+\frac{3,5}{x}+\cancel{\frac{x}{3,5}}+\frac{3,5}{x}\right)=\frac{3,5}{x}$

$y = \frac{3,5}{x}$ обрат. пропорц., график гипербола

x	-5	-3,5	-1	-0,5	0,5	1	3,5	5
y	-0,7	-1	-3,5	-7	7	3,5	1	0,7



x	-3,5	3,5
y	-1	1

$[-3,5;0)\cup[3,5;+\infty)$

$y = m$

$m = -1$

$m = 1$

Ответ: $m = \pm 1$.

Самостоятельная работа.

1. Постойте график функции $y=\frac{4x+2}{2x^2+x}$ и определите , при каких значениях параметра а прямая у=а не имеет с графиком общих точек.

Проверь решение

2. Постройте график функции $y = x^2 - |x| + 2$ и определите, при каких значениях параметра а прямая $y = a$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Проверь решение

3. Постройте график функции $y = \left|x^2 - x - 12\right|$ и определите , при каких значениях параметра а прямая у=а имеет с графиком три или более общих точек.

Проверь решение

4. Постройте график функции $y=\frac{2x^3-x^2+18x-9}{2x-1}$ и определите, при каких значениях параметра k прямая y=kx не имеет с графиком общих точек.

Закончить урок

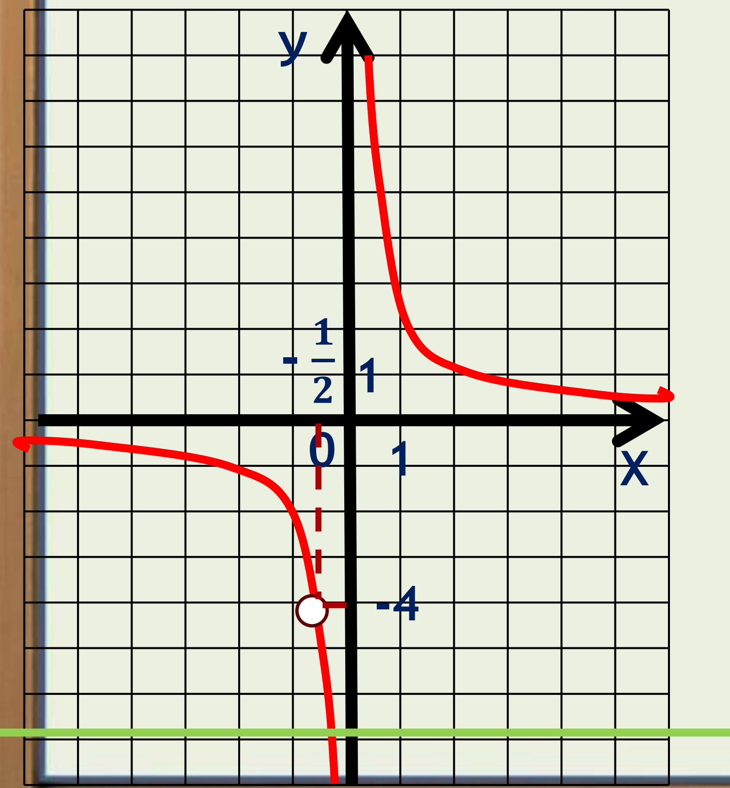
Проверь решение

1. Постойте график функции $y=\frac{4x+2}{2x^2+x}$ *и определите , при каких значениях параметра а прямая у=а не имеет с графиком общих точек.*

Преобразуем функцию:

$$y=\frac{4x+2}{2x^2+x}=\frac{2(x+1)}{x(2x+1)}=\frac{2}{x}$$

ОДЗ: $x(2+x)\neq 0$, $x\neq 0$, $x\neq -\frac{1}{2}$



Строим график функции $y=\frac{2}{x}$

Дополнительные точки: (2;1), (1;2), (4;0,5), (-2;-1), (-1;-2), (-4;-0,5)

$$y\left(-\frac{1}{2}\right)=2:\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$$

а = -4 **а = 0**

Ответ: -4 и 0.

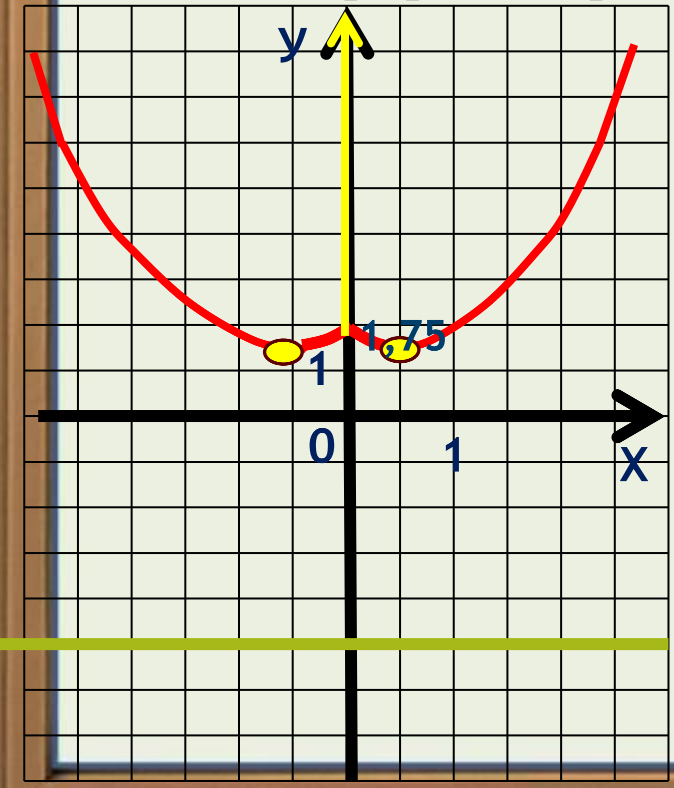
вернуться

2. Постройте график функции $y = x^2 - |x| + 2$ ***и определите, при каких значениях параметра а прямая*** $y = a$ ***имеет с графиком ровно две общие точки.***

Преобразуем функцию, используя определение модуля числа

$$y = \begin{cases} x \geq 0, & x^2 - x + 2 \ (1) \\ x < 0, & x^2 + x + 2 \ (2) \end{cases}$$

Построим график функции при $x \geq 0, y = x^2 - x + 2$, квадратичная функция, график – парабола, ветви ↑ , вершина (0,5; 1,75).



Дополнительные точки: (0;2), (1;2), (2;4), (3;8).

Строим график функции (1).

График функции при $x < 0$, симметричен построенной параболе относительно оси ординат.

Определим при каких значениях параметра a прямая у=a имеет с графиком ровно две общие точки.

a = -1,75 $\quad a \in (2; +\infty)$

Ответ:1,75; $(2; +\infty)$

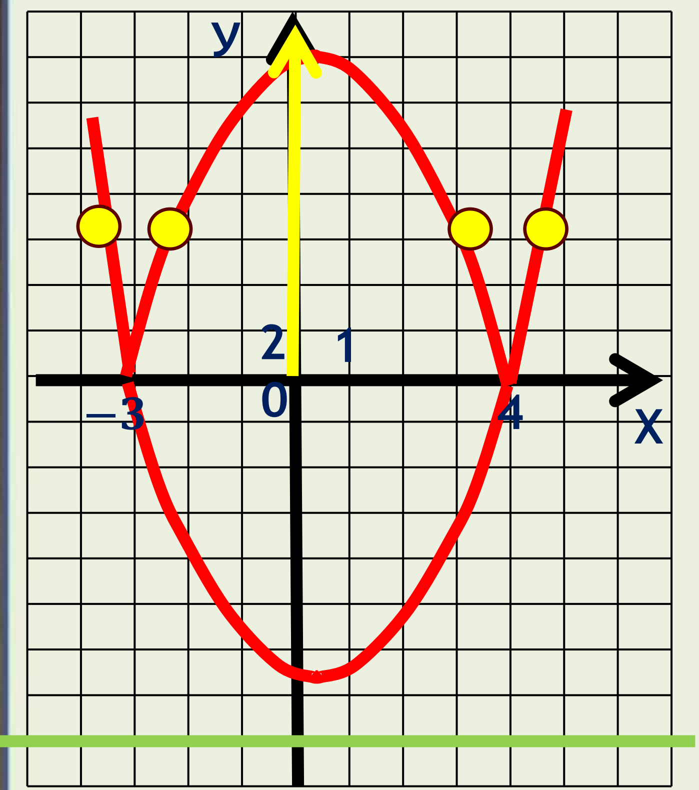
вернуться

*3. **Постройте график функции*** $y = |x^2 - x - 12|$ ***и определите , при каких значениях параметра а прямая у=а имеет с графиком три или более общих точек.***

Построим график функции $y = x^2 - x - 12$, квадратичная функция,

график – парабола, ветви ↑ , вершина (0,5; -12,25).

Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс: у=0, $x^2 - x - 12 = 0$



Д=49, $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

Строим параболу.

Данную параболу преобразуем в график функции $y = |x^2 - x - 12|$, $y \geq 0$.

Найдем значения параметра *а* , при которых прямая *у*=*ах* имеет с графиком три или более общих точек, используя чертеж.

$a \in (0; -12,25]$

Ответ: $(0; -12,25]$

вернуться

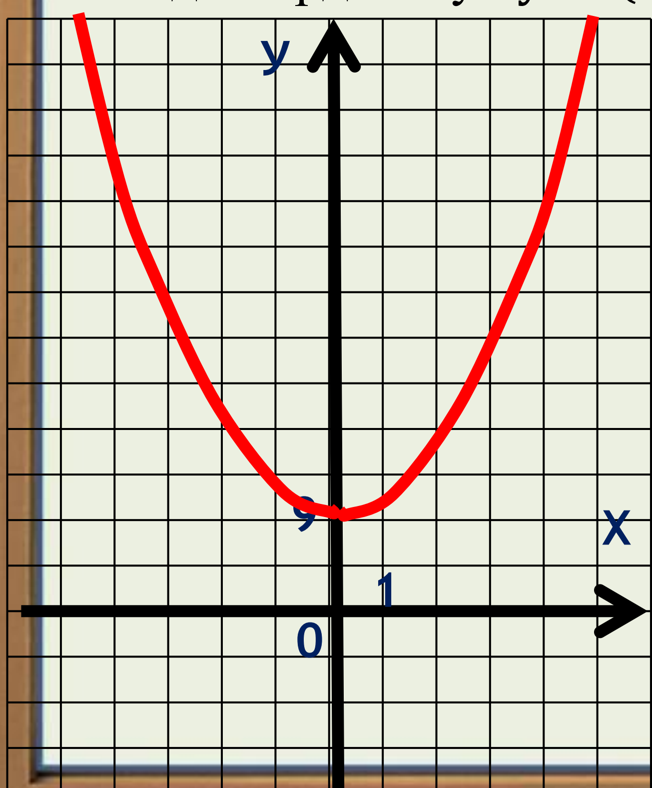
4. Постройте график функции $y = \frac{2x^3 - x^2 + 18x - 9}{2x - 1}$ ***и определите, пи каких значениях параметра k прямая y=kx не имеет с графиком общих точек.***

Преобразуем функцию: $y = \frac{2x^3 - x^2 + 18x - 9}{2x - 1} = \frac{x^2(2x-1) + 9(2x-1)}{2x-1} = \frac{(x^2+9)(2x-1)}{2x-1} = x^2 + 9$

Строим график функцииу $= x^2 + 9$, *ДОЗ:* $x \neq 0{,}5$

Прямая *y=kx* не имеет общих точек с графиком данной функции при $x \neq 0{,}5$

Найдем ординату: $y = (0{,}5)^2 + 9 = 9{,}25$. Получили точку (0,5; 9,25).



Найдем *k*, подставив координаты точки в формулу

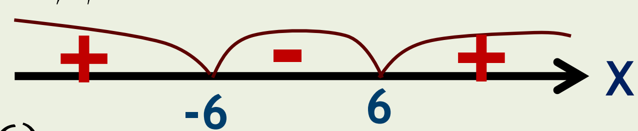
$y = kx;\quad 9{,}25 = 0{,}5\,k;\quad k = 18{,}5$

Для того, чтобы найти значения параметра *k* при которых графики функций не пересекаются,

рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} y = kx, \\ y = x^2 + 9 \end{cases}$

$x^2 - kx + 9 = 0$, $\quad Д = k^2 - 36 < 0$

$(k-6)(k+6) < 0$



f(0)=-36 $\quad k \in (-6; 6)$

Ответ: 18,5 ; (-6;6).

вернуться

Удачи на экзамене!!!